Die j-Funktion, Abschätzung der Fourierkoeffizienten

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 01.04.2010

Felix Voigtländer

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich zunächst mit der j-Funktion. Diese stellt einerseits eine Bijektion zwischen der Menge der Bahnen $\mathbb{H}/\Gamma$ und $\mathbb{C}$ her. Andererseits ist sie unter den modularen Funktionen vom Gewicht 0, die also invariant unter der Operation der Modulgruppe sind, dadurch ausgezeichnet, dass sich *jede* solche Funktion als rationale Funktion in der j-Funktion darstellen lässt, was auch den Namen „absolute Invariante“ rechtfertigt.

Im zweiten Teil wird eine Abschätzung für die Fourierkoeffizienten von Modulformen bewiesen, so dass darauf aufbauend die Definition der einer Modulform zugeordneten L-Reihe gegeben wird und deren Konvergenz bewiesen werden kann.

§ 1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden kurz einige wichtige Ergebnisse aus vorherigen Vorträgen zusammengefasst.

(1.1) Bemerkung
Die Gruppe $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert durch $\gamma.z := \frac{az+b}{cz+d}$ für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ auf der oberen Halbebene. Für den sogenannten Fundamentalbereich

$$D := \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, |\mathrm{Re}\,(z)| < \frac{1}{2} \text{ und } |z| > 1 \right\}$$

existiert zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma.z \in \overline{D}$.

Wir benutzen die Notationen $\Gamma z := \{\gamma.z \mid \gamma \in \Gamma\}$ für $z \in \mathbb{H}$ und $\mathbb{H}/\Gamma := \{\Gamma z \mid z \in \mathbb{H}\}$.$\diamond$

(1.2) Definition
Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt schwach modular vom Gewicht k, falls für alle $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ und alle $z \in \mathbb{H}$, in denen f keinen Pol hat, die Gleichung

$$f(\gamma.z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \cdot f(z)$$

erfüllt ist.

Eine schwach modulare Funktion f heißt modulare Funktion, falls f meromorph in ∞ ist, das heißt, wenn es ein $\gamma > 0$ gibt, so dass f auf dem Streifen

$$S_{\gamma,\infty} = \{z \in \mathbb{H} \mid \gamma < \operatorname{Im}(z) < \infty\}$$

holomorph ist und für die Fourierentwicklung der Form $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{2\pi i n z}$ auf $S_{\gamma,\infty}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < -m$ schon $a_n = 0$ gilt.

Dann wird für $r := e^{-2\pi\gamma} > 0$ durch $\widehat{f} : K_{0,r}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{2\pi i n z}$ eine auf $K_{0,r}(0)$ holomorphe Funktion definiert. Die Ordnung von f in ∞ wird in diesem Fall definiert durch $\operatorname{ord}_\infty(f(z)) := \operatorname{ord}_0\left(\widehat{f}(z)\right)$ und das Residuum in ∞ wird gegeben durch $\operatorname{Res}_\infty(f(z)) := \operatorname{Res}_0\left(\widehat{f}(z)\right)$.

Eine modulare Funktion f heißt Modulform, falls f holomorph auf $\mathbb{H}$ und holomorph in ∞ ist, das heißt, dass für die Koeffizienten der Fourierentwicklung $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ gilt.

Eine Modulform f heißt Spitzenform, falls zusätzlich $a_0 = 0$ gilt. ◇

(1.3) Bemerkung
Sei $k \in 2\mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist genau dann schwach modular vom Gewicht k, falls für jedes $z \in \mathbb{H}$, in dem f keinen Pol hat, gilt:

$$f(z+1) = f(z) \text{ und } f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k \cdot f(z).$$

◇

(1.4) Bemerkung
Die Eisensteinreihen $G_k := \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}$ für $k \in 2\mathbb{N}$, $k \geq 4$ sind Modulformen vom Gewicht k, für die die Darstellung

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \cdot e^{2\pi i n z}$$

für $z \in \mathbb{H}$ gilt. Dabei ist $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$ die k-te Teilerpotenzsumme. Für die ersten Werte der Zetafunktion gilt weiter: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ und $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$. ◇

(1.5) Bemerkung
Für $g_4 := 60 \cdot G_4$ und $g_6 := 140 \cdot G_6$ ist die Diskriminante Δ definiert als $\Delta := g_4^3 - 27g_6^2$. Damit ist Δ eine Spitzenform vom Gewicht 12, die auf $\mathbb{H}$ nullstellenfrei ist. ◇

(1.6) Satz ($\frac{k}{12}$-Formel, Gewichtsformel)
Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $f \neq 0$ eine modulare Funktion vom Gewicht k. Sei weiter $\rho := e^{2\pi i/3}$, sowie für $z \in \mathbb{H}$

$$e_z := \begin{cases} 2, & z \in \Gamma i \\ 3, & z \in \Gamma\rho \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{ord}_\infty (f(z)) + \sum_{\Gamma w \in \mathbb{H}/\Gamma} \frac{\mathrm{ord}_w (f(z))}{e_w} = \frac{k}{12}.$$

Insbesondere ist die auftretende Summe endlich und wohldefiniert, das heißt, $\mathrm{ord}_w (f(z))$ hängt nur von Γw ab. ◇

(1.7) Bemerkung
Für $k \in 2\mathbb{N}_0$ hat der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{M}_k$ der Modulformen vom Gewicht k als Basis die Familie von Monomen $G_4^m \cdot G_6^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $2m + 3n = \frac{k}{2}$. ◇

§ 2 Die j-Funktion

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der j-Funktion untersucht. Das Kernergebnis ist, dass sich jede modulare Funktion vom Gewicht 0 als rationale Funktion in j schreiben lässt.

Wir beginnen mit der zentralen

(2.1) Definition (j-Funktion, absolute Invariante)
Die Funktion

$$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{(12 \cdot g_4(z))^3}{\Delta(z)}$$

heißt j-Funktion oder absolute Invariante. ◇

Die ersten Eigenschaften der j-Funktion werden zusammengefasst in dem folgenden

(2.2) Lemma

1. Die j-Funktion ist eine modulare Funktion vom Gewicht 0.
2. Die absolute Invariante ist holomorph auf $\mathbb{H}$ und hat einen einfachen Pol in ∞ mit $\mathrm{Res}_\infty (j(z)) = 1$.
3. Die j-Funktion liefert eine wohldefinierte Bijektion $\tilde{j} : \mathbb{H}/\Gamma \to \mathbb{C}, \Gamma z \mapsto j(z)$. ◇

Beweis

1. Da Δ eine Modulform vom Gewicht 12 und g_4 eine Modulform vom Gewicht 4 ist, gilt für $z \in \mathbb{H}$:

$$j(z+1) = \frac{(12 \cdot g_4(z+1))^3}{\Delta(z+1)} = \frac{(12 \cdot g_4(z))^3}{\Delta(z)} = j(z)$$

und weiter:

$$j\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{\left(12 \cdot g_4\left(-\frac{1}{z}\right)\right)^3}{\Delta\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{\left(12 \cdot z^4 \cdot g_4(z)\right)^3}{z^{12} \cdot \Delta(z)} = \frac{(12 \cdot g_4(z))^3}{\Delta(z)} = z^0 \cdot j(z)\,.$$

Weil f, wie in Teil (2) des Beweises gezeigt wird, holomorph auf $\mathbb{H}$ und meromorph in ∞ ist, folgt nach Bemerkung (1.3) die Behauptung.

2. Nach Bemerkung (1.5) ist die Diskriminante nullstellenfrei auf $\mathbb{H}$, so dass j mit g_4 und Δ holomorph auf der oberen Halbebene ist. Wegen Bemerkung (1.4) hat man für $z \in \mathbb{H}$ die Darstellungen

$$\begin{aligned} g_4(z) &= 60 \cdot G_4(z) = \frac{(2\pi)^4}{12} \cdot \left(1 + 240 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \cdot e^{2\pi i n z}\right) \\ g_6(z) &= 140 \cdot G_6(z) = \frac{(2\pi)^6}{216} \cdot \left(1 - 504 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) \cdot e^{2\pi i n z}\right). \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned} A:\ & K_1(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \quad 240 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_3(n+1) \cdot z^n \\ B:\ & K_1(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto -504 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_5(n+1) \cdot z^n. \end{aligned}$$

Dann sind A und B holomorph und man hat für $z \in K_1(0)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} & \widehat{\Delta}(z) = (\widehat{g}_4(z))^3 - 27 \cdot (\widehat{g}_6(z))^2 \\ = & \left(\frac{(2\pi)^4}{12}(1 + z \cdot A(z))\right)^3 - 27 \cdot \left(\frac{(2\pi)^6}{216}(1 + z \cdot B(z))\right)^2 \\ = & \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot \left(\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (z \cdot A(z))^k - \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (z \cdot B(z))^k\right) \\ = & z \cdot \underbrace{\frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k+1} \cdot z^k \cdot (A(z))^{k+1} - \sum_{k=0}^{1} \binom{2}{k+1} \cdot z^k \cdot (B(z))^{k+1}\right)}_{=:C(z)}. \end{aligned}$$

Dabei ist $C : K_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot \left(\binom{3}{1} \cdot A(0) - \binom{2}{1} \cdot B(0) \right) \\ &= \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot (3 \cdot 240 \cdot \sigma_3(1) - 2 \cdot (-504) \cdot \sigma_5(1)) \\ &= \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot (3 \cdot 240 + 2 \cdot 504) = (2\pi)^{12} \neq 0. \end{aligned}$$

Ebenso gilt $(12 \cdot \widehat{g_4}(0))^3 = (2\pi)^{12} \neq 0$. Also hat man für $z \in K_1(0) \setminus \{0\}$ die Darstellung

$$\widehat{j}(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{(12 \cdot \widehat{g_4}(z))^3}{C(z)},$$

wobei $\frac{(12 \cdot \widehat{g_4}(z))^3}{C(z)}$ eine auf $K_1(0)$ holomorphe Funktion darstellt, die in 0 nicht verschwindet. Damit hat $\widehat{j}$ in 0 einen Pol erster Ordnung, so dass auch j in ∞ einen Pol erster Ordnung hat. Für das Residuum gilt folglich:

$$\mathrm{Res}_\infty(j(z)) = \mathrm{Res}_0\left(\widehat{j}(z)\right) = \lim_{z \to 0} z \cdot \widehat{j}(z) = \lim_{z \to 0} \frac{(12 \cdot \widehat{g_4}(z))^3}{C(z)} = \frac{(2\pi)^{12}}{(2\pi)^{12}} = 1.$$

Das war die Behauptung.

3. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung $\tilde{j} : {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma} \to \mathbb{C}, \Gamma z \mapsto j(z)$ wohldefiniert ist. Seien also $z, z' \in \mathbb{H}$ mit $z' = \gamma.z$ für ein $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Dann ist:

$$j(z') = j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^0 j(z) = j(z),$$

da j eine Modulform vom Gewicht 0 ist. Die damit wohldefinierte Funktion $\tilde{j}$ ist nun genau dann bijektiv, wenn für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $\widetilde{f_\lambda} : {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma} \to \mathbb{C}, \Gamma z \mapsto \tilde{j}(\Gamma z) - \lambda$ genau eine Nullstelle hat; das heißt, dass für $f_\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto j(z) - \lambda$ genau ein $\Gamma w \in {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma}$ mit $\mathrm{ord}_w(f_\lambda(z)) > 0$ existiert. Mit j ist auch f_λ modular vom Gewicht 0, hat einen Pol erster Ordnung in ∞ und ist holomorph auf $\mathbb{H}$. Für $\lambda \notin \{j(i), j(\rho)\}$ erhält man deshalb nach der $k/12$-Formel (Satz (1.6)) wegen $\mathrm{ord}_w(f_\lambda(z)) \geq 0$ für $\Gamma w \in {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma}$:

$$\underbrace{\mathrm{ord}_\infty(f_\lambda(z))}_{=-1} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{ord}_i(f_\lambda(z))}_{=0} + \frac{1}{3}\underbrace{\mathrm{ord}_\rho(f_\lambda(z))}_{=0} + \sum_{\Gamma w \in {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma} \setminus \{\Gamma i, \Gamma \rho\}} \underbrace{\mathrm{ord}_w(f_\lambda(z))}_{\geq 0} = \frac{0}{12},$$

was nur möglich ist, wenn $\mathrm{ord}_w(f_\lambda(z)) = 1$ für genau ein $\Gamma w \in {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma}$ gilt.

Für $\lambda = j(i)$ ergibt sich:

$$\underbrace{\mathrm{ord}_\infty (f_\lambda(z))}_{=-1} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{ord}_i (f_\lambda(z))}_{\geq 1} + \frac{1}{3}\underbrace{\mathrm{ord}_\rho (f_\lambda(z))}_{\geq 0} + \sum_{\Gamma w \in \mathbb{H}/\Gamma \setminus \{\Gamma i, \Gamma\rho\}} \underbrace{\mathrm{ord}_w (f_\lambda(z))}_{\geq 0} = \frac{0}{12},$$

woraus man $\mathrm{ord}_w(f_\lambda(z)) = 0$ für $\Gamma w \in \mathbb{H}/\Gamma \setminus \{\Gamma i, \Gamma\rho\}$ sowie $\mathrm{ord}_\rho(f_\lambda(z)) = 0$ schließt, da die linke Seite sonst nicht verschwinden kann. Genauso schließt man im Fall $\lambda = j(\rho)$. Insgesamt folgt die Bijektivität von $\tilde{j}$. □

Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts ist der folgende

(2.3) Satz
Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ meromorph auf $\mathbb{H}$. Dann sind äquivalent:

1. f ist eine modulare Funktion vom Gewicht 0.
2. f ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.
3. f ist eine rationale Funktion in der absoluten Invarianten j. ◇

Beweis
Wir zeigen den Ringschluss „(3) ⇒ (2) ⇒ (1) ⇒ (3)“.

1. „(3) ⇒ (2)“: Sei $f \in \mathbb{C}(j)$, also $f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot j^k(z)}{\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot j^k(z)}$ für geeignete $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0 \neq b_m$. Sei weiter $l := \max\{n, m\}$. Dann haben $g := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot j^k$ und $h := \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot j^k$ in ∞ jeweils einen Pol der Ordnung n, beziehungsweise m, da j in ∞ einen Pol erster Ordnung hat. Die Diskriminante Δ hat als Spitzenform eine Nullstelle in ∞, so dass $\Delta^l \cdot g$ und $\Delta^l \cdot h$ holomorph in ∞ (sowie auf $\mathbb{H}$) und jeweils schwach modular vom Gewicht $12 \cdot l$, insgesamt also Modulformen vom Gewicht $12 \cdot l$ sind. Wegen $f = \frac{\Delta^l \cdot g}{\Delta^l \cdot h}$ folgt die Behauptung.
2. „(2) ⇒ (1)“: Seien $g, h : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ Modulformen zum Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ mit $h \neq 0$ und $f = \frac{g}{h}$. Da g, h als Modulformen holomorph auf $\mathbb{H}$ sind, ist $f = \frac{g}{h}$ meromorph auf $\mathbb{H}$ und es gilt für $z \in \mathbb{H}$ mit $f(z) \neq \infty$: $f(z+1) = \frac{g(z+1)}{h(z+1)} = \frac{g(z)}{h(z)} = f(z)$ und weiter:
$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{g\left(-\frac{1}{z}\right)}{h\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^k g(z)}{z^k h(z)} = \frac{g(z)}{h(z)} = z^0 \cdot f(z).$$
Damit ist f nach Bemerkung (1.3) schwach modular vom Gewicht 0. Wir müssen noch zeigen, dass $f = \frac{g}{h}$ meromorph in ∞ ist. Weil g, h Modulformen sind, gibt es holomorphe Funktionen $\widehat{g}, \widehat{h} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = \widehat{g}\left(e^{2\pi i z}\right)$ und $h(z) = \widehat{h}\left(e^{2\pi i z}\right)$

für $z \in \mathbb{H}$. Damit ist $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{\widehat{g}(e^{2\pi iz})}{\widehat{h}(e^{2\pi iz})} = \frac{\widehat{g}}{\widehat{h}}\left(e^{2\pi iz}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$, wobei wegen $h \neq 0$ auch $\widehat{h} \neq 0$ gilt, so dass $\frac{\widehat{g}}{\widehat{h}} : \mathbb{E} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph ist. Damit ist nach Definition f meromorph in ∞, insgesamt also als modulare Funktion vom Gewicht 0 erkannt.

3. „(1) $\Rightarrow$ (3)“: Sei f modular vom Gewicht 0 und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \not\equiv 0$. Nach der $\frac{k}{12}$-Formel (Satz (1.6)) hat f dann nur endlich viele Polstellen $\Gamma a_1, \ldots, \Gamma a_n \in {}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma}$ modulo Γ mit Ordnungen $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, und der Begriff einer Polstelle modulo Γ ist wohldefiniert, das heißt $z \in \mathbb{H}$ ist genau dann eine Polstelle, wenn $\gamma.z$ für ein $\gamma \in \Gamma$ eine Polstelle ist. Die Polstellen von f sind also genau die $\gamma.a_l$ für beliebige $l \in \underline{n} := \{1, \ldots, n\}$ und $\gamma \in \Gamma$, jeweils mit Ordnung k_l.

   Da j invariant unter Γ ist, hat die Funktion

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \prod_{m=1}^{n} \left(j(z) - j(a_m)\right)^{k_m}$$

   für $l \in \underline{n}$ und $\gamma \in \Gamma$ eine Nullstelle in $\gamma.a_l$ mit $\operatorname{ord}_{\gamma.a_l}(\psi(z)) \geq k_l$. Deshalb ist die durch

$$g : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) \cdot \prod_{m=1}^{n} \left(j(z) - j(a_m)\right)^{k_m}$$

   definierte Funktion holomorph auf $\mathbb{H}$. Außerdem ist f genau dann eine rationale Funktion in j, wenn dies für g gilt. Weiterhin ist mit f und j auch g modular vom Gewicht 0.

   Sei $k := -\operatorname{ord}_\infty(g(z)) \in \mathbb{N}$, falls g einen Pol in ∞ hat, oder $k := 0$ sonst. In jedem Fall hat die holomorphe Funktion $\widehat{g} : K_{0,1}(0) \to \mathbb{C}$ mit $\widehat{g}\left(e^{2\pi iz}\right) = g(z)$ für $z \in \mathbb{H}$ einen Pol der Ordnung k in 0 (wobei ein Pol der Ordnung 0 als hebbare Singularität zu verstehen ist). Weil $\widehat{\Delta} : K_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $\widehat{\Delta}\left(e^{2\pi iz}\right) = \Delta(z)$ für $z \in \mathbb{H}$ eine Nullstelle in 0 hat (da Δ eine Spitzenform ist), ist $h := g \cdot \Delta^k$ holomorph auf $\mathbb{H}$, wobei $\widehat{h} = \widehat{g} \cdot \widehat{\Delta}^k$ holomorph in 0 ist. Damit ist h holomorph in ∞ und es gilt für $z \in \mathbb{H}$ einerseits $h(z+1) = g(z+1) \cdot (\Delta(z+1))^k = g(z) \cdot (\Delta(z))^k = h(z)$ und andererseits

$$h\left(-\frac{1}{z}\right) = g\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\Delta\left(-\frac{1}{z}\right)\right)^k = z^0 \cdot g(z) \cdot \left(z^{12} \cdot \Delta(z)\right)^k = z^{12 \cdot k} \cdot h(z),$$

   weil g modular vom Gewicht 0 und Δ nach Bemerkung (1.5) eine Spitzenform vom Gewicht 12 ist. Nach Bemerkung (1.3) ist h damit als Modulform vom Gewicht $12 \cdot k$ erkannt. Bemerkung (1.7) liefert dann, dass h eine Darstellung der Form

$$h = \sum_{m=1}^{r} \gamma_m \cdot G_4^{\alpha_m} \cdot G_6^{\beta_m}$$

für ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{C}$, sowie $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{N}_0$ und

$$2\alpha_m + 3\beta_m = \frac{12 \cdot k}{2} = 6k$$

für $m \in \underline{r} = \{1, \ldots, r\}$ besitzt.

Für $m \in \underline{r}$ erhält man aus der Gleichung $2\alpha_m + 3\beta_m = 6k$ durch Reduktion modulo 3, beziehungsweise 2, die Kongruenzen

$$\begin{aligned} -\alpha_m &\equiv 3\alpha_m - \alpha_m \equiv 2\alpha_m \equiv 6k - 3\beta_m \equiv 0 \qquad &(\operatorname{mod} 3)\,, \\ \beta_m &\equiv \beta_m + 2\beta_m \equiv 3\beta_m \equiv 6k - 2\alpha_m \equiv 0 \qquad &(\operatorname{mod} 2)\,, \end{aligned}$$

das heißt für $m \in \underline{r}$ ergibt sich $\alpha'_m := \frac{\alpha_m}{3} \in \mathbb{N}_0$ und $\beta'_m := \frac{\beta_m}{2} \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha'_m + \beta'_m = k$. Damit ist also

$$g = \frac{h}{\Delta^k} = \sum_{m=1}^{r} \gamma_m \frac{G_4^{\alpha_m} \cdot G_6^{\beta_m}}{\Delta^k} = \sum_{m=1}^{r} \gamma_m \left(\frac{G_4^3}{\Delta}\right)^{\alpha'_m} \left(\frac{G_6^2}{\Delta}\right)^{\beta'_m} .$$

Da die rationalen Funktionen in j eine (assoziative) $\mathbb{C}$-Algebra bilden, reicht es deshalb, zu zeigen, dass $\frac{G_4^3}{\Delta}$ und $\frac{G_6^2}{\Delta}$ rationale Funktionen in j sind.

Es gelten aber die Identiäten:

$$\frac{j}{12^3 \cdot 60^3} = \frac{1}{12^3 \cdot 60^3} \cdot \frac{(12 \cdot g_4)^3}{\Delta} = \frac{1}{12^3 \cdot 60^3} \cdot \frac{(12 \cdot 60 \cdot G_4)^3}{\Delta} = \frac{G_4^3}{\Delta}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12^3 \cdot 27 \cdot 140^2} \cdot \left(j - 12^3\right) \\ = \; & \frac{1}{12^3 \cdot 27 \cdot 140^2} \cdot \left(\frac{(12 \cdot 60 \cdot G_4)^3}{(60 \cdot G_4)^3 - 27 \cdot (140 \cdot G_6)^2} - 12^3 \right) \\ = \; & \frac{1}{12^3 \cdot 27 \cdot 140^2} \cdot \frac{(12 \cdot 60 \cdot G_4)^3 - 12^3 \cdot (60 \cdot G_4)^3 + 12^3 \cdot 27 \cdot (140 \cdot G_6)^2}{\Delta} \\ = \; & \frac{1}{12^3 \cdot 27 \cdot 140^2} \cdot \frac{12^3 \cdot 27 \cdot 140^2 \cdot G_6^2}{\Delta} = \frac{G_6^2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

§ 3 Abschätzung der Fourierkoeffizienten und Definition von L-Funktionen

Wir wollen den Modulformen so genannte L-Reihen, beziehungsweise L-Funktionen zuordnen, indem wir die Fourier-Koeffizienten als Koeffizienten für Dirichlet-Reihen, das heißt Reihen der Form $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cdot m^{-s}$ für eine komplexe Folge $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$, betrachten. Die L-Funktion ist dann die durch die Reihe definierte holomorphe Funktion. Um die Konvergenz der L-Reihen auf einer Halbebene der Form $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \gamma\}$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ zu sichern, werden Wachstumsaussagen für die Fourierkoeffizienten benötigt.

Das Wachstum der Koeffizienten von Eisensteinreihen beschreibt das folgende

(3.1) Lemma
Sei $k \in 2\mathbb{N}$, $k \geq 4$ und G_k die k-te Eisensteinreihe; dann existieren $A, B > 0$, so dass für die Koeffizienten der Fourierentwicklung $G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{2\pi i n z}$ die Abschätzung

$$A \cdot n^{k-1} \leq |a_n| \leq B \cdot n^{k-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\diamond$

Beweis
Nach Bemerkung (1.4) gilt für die Koeffizienten der Eisensteinreihe für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sigma_{k-1}(n) \right| = \left| 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{d|n} d^{k-1} \right| \\ &= 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{d|n} d^{k-1} \geq 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(k-1)!} \cdot n^{k-1}. \end{aligned}$$

Also gilt die untere Abschätzung für $A := 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(k-1)!} > 0$. Für die andere Richtung betrachte man

$$\frac{|a_n|}{n^{k-1}} = A \cdot \sum_{d|n} \frac{d^{k-1}}{n^{k-1}} = A \cdot \sum_{d|n} \frac{1}{\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}} = A \cdot \sum_{d|n} \frac{1}{d^{k-1}} \leq A \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^{k-1}} = A \cdot \zeta(k-1) < \infty,$$

wobei die dritte Gleichheit folgt, weil die Abbildung

$$\chi : \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\} \to \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, d \mapsto \frac{n}{d}$$

bijektiv (da wohldefiniert und selbstinvers) ist. Damit ist für $B := A \cdot \zeta(k-1) > 0$ die zweite behauptete Ungleichung erfüllt. $\square$

(3.2) Definition
Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Man schreibt $\alpha_n = \mathcal{O}(n^\chi)$ für ein $\chi \in \mathbb{R}$, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass $|\alpha_n| \leq C \cdot n^\chi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\diamond$

Für allgemeine Spitzenformen vom Gewicht k hat Deligne gezeigt, dass eine Wachstumsabschätzung der Form $a_n = \mathcal{O}\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Wir begnügen uns mit einer etwas schwächeren Abschätzung.

(3.3) Satz (Abschätzung der Fourierkoeffizienten von Spitzenformen)
Ist $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Spitzenform vom Gewicht $k \in 2\mathbb{N}_0$, so hat man für die Koeffizienten der Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{2\pi i n z}$ die Wachstumsbeschränkung $a_n = \mathcal{O}\left(n^{k/2}\right)$. $\diamond$

Beweis
Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto (\mathrm{Im}(z))^{k/2} \cdot |f(z)|$ und zeigen, dass ϕ beschränkt ist. Es ist ϕ invariant unter Γ, denn für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\phi(\gamma.z) &= (\mathrm{Im}(\gamma.z))^{k/2} \cdot |f(\gamma.z)| = \left(\mathrm{Im}\left(\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}\right)\right)^{k/2} \cdot \left|(cz+d)^k \cdot f(z)\right| \\
&= \left(\mathrm{Im}\left(\frac{(ax+aiy+b)(cx+d-ciy)}{|cz+d|^2}\right)\right)^{k/2} \cdot |cz+d|^k \cdot |f(z)| \\
&= \frac{(\mathrm{Im}((ax+aiy+b)(cx+d-ciy)))^{k/2}}{|cz+d|^k} \cdot |cz+d|^k \cdot |f(z)| \\
&= \Bigg(\underbrace{(ad-bc)}_{=\det(\gamma)=1} y\Bigg)^{k/2} \cdot |f(z)| = (\mathrm{Im}(z))^{k/2} \cdot |f(z)| = \phi(z).
\end{aligned}$$

Die Abbildung $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot z^n$, das heißt $g(z) = \frac{\widehat{f}(z)}{z}$, ist holomorph und damit insbesondere stetig auf $\mathbb{E}$. Deshalb existiert ein $M > 0$ mit $|g(z)| \leq M$ für $z \in K_{\frac{1}{2}}(0)$. Es ist außerdem $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k/2}}{e^{2\pi x}} = 0$, das heißt zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $C > 0$ mit $\left|x^{k/2} \cdot e^{-2\pi x}\right| \leq 1$ für $x > C$. Die stetige Funktion $[0, C] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{k/2} \cdot e^{-2\pi x}$ ist auf dem Kompaktum $[0, C]$ beschränkt, so dass ein $M' > 1$ mit $\left|x^{k/2} \cdot e^{-2\pi x}\right| \leq M'$ für $x \in [0, C]$ existiert, womit diese Abschätzung für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ gilt. Für $z \in \mathbb{H}$ mit

$e^{2\pi iz} \in K_{\frac{1}{2}}(0)$, das heißt $\mathrm{Im}(z) > -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\ln(2)}{2\pi} > 0$ gilt dann die Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\phi(z)| &= |\mathrm{Im}(z)|^{k/2} \cdot |f(z)| = |\mathrm{Im}(z)|^{k/2} \cdot \left| e^{2\pi iz} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot e^{2\pi inz} \right| \\ &= |\mathrm{Im}(z)|^{k/2} \cdot e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)} \cdot \left| g\left(e^{2\pi iz}\right) \right| \leq M\, |\mathrm{Im}(z)|^{k/2} \cdot e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)} \leq MM' =: C'. \end{aligned}$$

Wir betrachten den Abschluss des Fundamentalbereichs der Modulgruppe aus Bemerkung (1.1): $\overline{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \wedge |z| \geq 1 \right\}$. Für $z \in \overline{D}$ hat man insbesondere: $1 \leq |z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$ und damit wegen $\mathrm{Im}(z) > 0$ schon

$$\mathrm{Im}(z) \geq \sqrt{1 - (\mathrm{Re}(z))^2} \geq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{\ln(2)}{2} > \frac{\ln(2)}{2\pi}.$$

Sei nun $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Nach Bemerkung (1.1) existiert dann ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma.z \in \overline{D}$. Es gilt also: $|\phi(z)| = |\phi(\gamma.z)| \leq C'$, da für $\gamma.z \in \overline{D}$ schon $\mathrm{Im}(\gamma.z) > \frac{\ln(2)}{2\pi}$ gilt.

Damit gilt für $z \in \mathbb{H}$ beliebig: $|\phi(z)| \leq C'$, also $|f(z)| \leq C' \cdot (\mathrm{Im}(z))^{-k/2}$. Sei $y > 0$ beliebig. Da f als Spitzenform holomorph auf $\mathbb{H}$ ist, gilt für $yi \in \mathbb{H}$ für die Koeffizienten der Fourierentwicklung die Formel

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_{[yi, yi+1]} f(\zeta) \cdot e^{-2\pi in\zeta} d\zeta \right| = \left| \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi in(x+iy)} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| f(x+iy) \cdot e^{-2\pi in(x+iy)} \right| dx \leq \int_0^1 C' \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi ny} dx = C' \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi ny}. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für jedes $y > 0$ gilt, erhält man für $n \in \mathbb{N}$ und $y = \frac{1}{n}$ schließlich: $|a_n| \leq e^{2\pi} \cdot C' \cdot n^{k/2}$, also die Behauptung. □

Mit den Abschätzungen der Fourierkoeffizienten für Eisensteinreihen und Spitzenformen können wir nun auch allgemeine Modulformen behandeln. Das geschieht in dem folgenden

(3.4) Lemma (Abschätzung der Fourierkoeffizienten von Modulformen)
Sei $k \in 2\mathbb{N}$ und $k \geq 4$, sowie $\mathbb{M}_k$ und $\mathbb{S}_k$ die $\mathbb{C}$-Vektorräume der Modulformen zum Gewicht k, beziehungsweise der Spitzenformen zum Gewicht k. Dann gilt:

1. $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k \oplus \mathbb{S}_k$.
2. Für $f \in \mathbb{M}_k$ mit der zugehörigen Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot e^{2\pi inz}$ gilt $\alpha_n = \mathcal{O}\left(n^{k-1}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. ◇

Beweis

1. Nach Bemerkung (1.4) gilt $G_k \in \mathbb{M}_k$. Sei nun $f \in \mathbb{M}_k$ mit der zugehörigen Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot e^{2\pi i n z}$. Da $\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} > 0$ gilt, ist $g : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) - \frac{\alpha_0}{2\zeta(k)} \cdot G_k(z)$ wohldefiniert. Dann ist $g \in \mathbb{M}_k$ und für die Fourierentwicklung erhält man mit Bemerkung (1.4):
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n - \frac{\alpha_0}{\zeta(k)} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sigma_{k-1}(n) \right) \cdot e^{2\pi i n z} + \left(\alpha_0 - \alpha_0 \frac{2\zeta(k)}{2\zeta(k)} \right),$$
also nach Konstruktion $g \in \mathbb{S}_k$ mit $f = g + \frac{\alpha_0}{2\zeta(k)} \cdot G_k$. Somit ist $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k + \mathbb{S}_k$. Damit $c \cdot G_k \in \mathbb{S}_k$ für ein $c \in \mathbb{C}$ gilt, muss $c \cdot 2\zeta(k) = 0$, also $c = 0$ gelten. Das bedeutet, es ist $\mathbb{C} \cdot G_k \cap \mathbb{S}_k = \{0\}$, so dass die Behauptung folgt.
2. Sei nun $f \in \mathbb{M}_k$. Wegen Teil (1) existiert dann ein $c \in \mathbb{C}$ und ein $g \in \mathbb{S}_k$ mit $f = c \cdot G_k + g$. Nach Satz (3.3) und Lemma (3.1) existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für die Koeffizienten $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cdot e^{2\pi i n z}$ und $G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot e^{2\pi i n z}$ mit einem $\beta_0 \in \mathbb{C}$ die Abschätzungen $|\gamma_n| \le C_1 \cdot n^{k/2}$ und $|\beta_n| \le C_2 \cdot n^{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Damit hat man insgesamt die Abschätzung:
$$|\alpha_n| = |c\beta_n + \gamma_n| \le |c|\,|\beta_n| + |\gamma_n| \le |c|\, C_2 \cdot n^{k-1} + C_1 \cdot n^{k/2} \le (|c|\, C_2 + C_1)\, n^{k-1}.$$
Die Behauptung folgt. □

Wie angekündigt kommen wir nun zur Definition der einer Modulform zugeordneten L-Reihe.

(3.5) Definition
Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Modulform vom Gewicht k mit Fourier-Entwicklung
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot e^{2\pi i n z}.$$
Dann heißt
$$L_f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{n^s}$$
die L-Reihe zu f. ◇

Mit der Konvergenz dieser Reihen beschäftigt sich der

(3.6) Satz (Konvergenz von L-Reihen)

1. Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Spitzenform vom Gewicht $k \in 2\mathbb{N}_0$. Dann konvergiert die L-Reihe $L_f(s)$ lokal-gleichmäßig absolut auf $\left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1 \right\}$, definiert also eine holomorphe, sogenannte L-Funktion
$$L_f : \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) > \frac{k}{2} + 1 \right\} \to \mathbb{C}, s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{n^s}.$$

2. Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Modulform vom Gewicht $k \in 2\mathbb{N}$ mit $k \geq 4$. Dann konvergiert die L-Reihe $L_f(s)$ lokal-gleichmäßig absolut auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > k\}$, definiert also eine holomorphe, sogenannte L-Funktion
$$L_f : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > k\} \to \mathbb{C}, s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{n^s}.$$
◇

Beweis

Wir beweisen beide Teile des Lemmas auf einmal. Sei dazu $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Spitzen-, beziehungsweise eine Modulform mit Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot e^{2\pi i n z}$, sowie $\gamma := \frac{k}{2}$ wenn $f \in \mathbb{S}_k$ gilt und $\gamma := k - 1$ sonst. Nach Satz (3.3), beziehungsweise Lemma (3.4) gilt dann $\alpha_n = \mathcal{O}(n^\gamma)$, das heißt, es existiert ein $C > 0$ mit $|\alpha_n| \leq C \cdot n^\gamma$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die Behauptung, in dem wir die gleichmäßige Konvergenz der L-Reihe auf einem beliebigen Kompaktum $\emptyset \neq K \subset G := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \gamma + 1\}$ zeigen. Auf dem Kompaktum K nimmt die stetige Funktion Re ein Minimum $\gamma_0 > \gamma + 1$ an, das heißt für $\varepsilon := \gamma_0 - \gamma - 1 > 0$ gilt für $z \in K$ die Ungleichung $\gamma - \mathrm{Re}(z) \leq \gamma - \gamma_0 = -1 - \varepsilon < -1$ und damit:
$$\left| \alpha_n \cdot \frac{1}{n^z} \right| \leq C \cdot n^\gamma \cdot \left| e^{-\ln(n) \cdot z} \right| = C \cdot n^\gamma \cdot e^{-\ln(n) \cdot \mathrm{Re}(z)} = C \cdot n^{\gamma - \mathrm{Re}(z)} \leq C \cdot n^{-1-\varepsilon}.$$

Nach Analysis II konvergiert wegen $-1 - \varepsilon < -1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot n^{-1-\varepsilon}$, so dass die Behauptung aus dem Weierstrassschen Majorantenkriterium und dem Satz von Weierstrass folgt. □