Modulformen, Teil 1

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 31.03.2010

Robin Blöhm

Dieser Vortrag führt uns zur Definition von Modulformen. Gemeinsam mit einem ersten Beispiel, den bereits bekannten Eisenstein-Reihen, ist sie im letzten der drei Abschnitte dieser Ausarbeitung zu finden.

§1 Schwach modulare Funktionen

Einige Eigenschaften von Modulformen gelten schon für eine größere Klasse von Funktionen, die hier definierten schwach modularen Funktionen.

(1.1) Definition (Schwach modulare Funktion)
Sei $k \in \mathbb{Z}$ sowie f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. Dann heißt f *schwach modular vom Gewicht* k, falls

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \cdot f(z) \tag{1}$$

für jedes $z \in \mathbb{H}$ sowie für alle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. $\diamond$

Als einfache Folgerung aus der Definition erhalten wir sofort folgendes

(1.2) Lemma
Sei $f \neq 0$ schwach modular vom Gewicht k. Dann ist k gerade. $\diamond$

Beweis
Wir wissen, dass

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Einsetzen in die Definition (1.1) liefert

$$f\left(\frac{(-1)\cdot z+0}{0\cdot z-1}\right) = (0\cdot z-1)^k \cdot f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ und somit

$$f(z) = (-1)^k \cdot f(z).$$

Wählen wir z so, dass $f(z) \neq 0$ ist, erhalten wir die Behauptung. □

Um die schwach modularen Funktionen leichter charakterisieren zu können, benötigen wir noch einige Vorbetrachtungen, die eingeleitet werden durch die nächste

(1.3) Definition
Seien $k \in \mathbb{Z}$ sowie $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ist nun f meromorph auf $\mathbb{H}$, dann definieren wir die durch σ induzierte Abbildung

$$\sigma \mapsto \sigma z := \frac{az+b}{cz+d}$$

sowie

$$f|_k\sigma(z) := (cz+d)^{-k} \cdot f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$. ◇

(1.4) Lemma
Seien $\sigma, \tau \in \Gamma$ sowie $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist die durch (1.3) definierte Abbildung $f \mapsto f|_k\sigma$ eine lineare Rechtsoperation der Gruppe Γ auf dem Raum der komplexen Funktionen f auf der oberen Halbebene. Mit anderen Worten:

1. Die Abbildung $f \mapsto f|_k\sigma$ ist linear und
2. es gilt $f|_k 1 = f$ sowie $f|_k(\sigma\tau) = (f|_k\sigma)|_k\tau$. ◇

Beweis
Wir bezeichnen den Faktor $(cz+d)$ mit $j(\sigma, z)$, falls $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Sei außerdem $z \in \mathbb{H}$.

1. Die Linearität ist klarerweise erfüllt, da sich $j(\sigma, z)^{-k}$ als Faktor nicht ändert, ebensowenig wie das Argument σz der Funktion.
2. Die Rechnung

   $$f|_k 1(z) = (0 \cdot z + 1)^{-k} \cdot f\left(\frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}\right) = f(z)$$

   impliziert bereits die erste Voraussetzung für die Gruppenoperation.

   Die zweite ist für $k = 0$ wegen

$$f|_0(\sigma\tau)(z) = f(\sigma\tau z) = f|_0\sigma(\tau z) = (f|_0\sigma)|_0\tau(z) \tag{2}$$

ebenfalls schnell gezeigt.

Sind nun $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\tau = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right)$, dann ist

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} ar+bt & as+bu \\ cr+dt & cs+du \end{pmatrix},$$

woraus

$$\begin{aligned} j(\sigma\tau, z) &= (cr+dt)\,z + (cs+du) \\ &= c\,(rz+s) + d\,(tz+u) \\ &= (c\,\frac{rz+s}{tz+u} + d)\cdot(tz+u) \\ &= (c\cdot\tau z + d)\cdot(tz+u) \\ &= j(\sigma, \tau z)\cdot j(\tau, z) \end{aligned} \tag{3}$$

folgt.

Für allgemeines $k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir mit $f|_k\sigma(z) = j(\sigma,z)^{-k}\cdot f|_0\sigma(z)$ unser gewünschtes Ergebnis

$$\begin{aligned} f|_k(\sigma\tau)(z) &= j(\sigma\tau,z)^{-k}\cdot f|_0(\sigma\tau)(z) \\ &\overset{(2),(3)}{=} j(\sigma,\tau z)^{-k}\cdot j(\tau,z)^{-k}\cdot (f|_0\sigma)|_0\tau(z) \\ &= (f|_k\sigma)|_k\tau(z). \end{aligned}$$

□

Diese Gruppenoperation benutzen wir nun, um eine Charakterisierung der schwach modularen Funktionen anzugeben.

(1.5) Lemma (Charakterisierung schwach modularer Funktionen)
Sei $k \in 2\mathbb{Z}$. Dann ist eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion f genau dann schwach modular, wenn

$$f(z+1) = f(z) \quad \text{und} \quad f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt. ◇

Beweis
Per Definition ist eine meromorphe Funktion f genau dann schwach modular, wenn

$$(cz+d)^{-k}\cdot f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)$$

für alle $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und alle $z \in \mathbb{H}$ gilt. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Invarianz von f unter der Gruppenoperation aus Definition (1.3). Das heißt, dass $f|_k\sigma = f$ für alle $\sigma \in \Gamma$ erfüllt sein muss.

Uns ist bereits bekannt, dass die Modulgruppe Γ von den Elementen $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugt wird. Aus diesem Grund genügt es für eine schwach modulare Funktion die Invarianz von f lediglich unter S und T zu zeigen.

Die zu zeigende Charakterisierung schwach modularer Funktionen vom Gewicht k entspricht den beiden Gleichungen aus Lemma (1.5), denn $f|_kS(z) = f(z)$ bedeutet per Definition

$$(1 \cdot z + 0)^{-k} \cdot f\left(\frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}\right) = f(z),$$

was äquivalent zu $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$, also der zweiten Gleichung ist.

Die erste Gleichung $f(z+1) = f(z)$ erhalten wir analog aus $f|_kT(z) = f(z)$, also

$$(0 \cdot z + 1)^{-k} \cdot f\left(\frac{1 \cdot z + 1}{0 \cdot z + 1}\right) = f(z),$$

da k gerade ist. □

§ 2 Fourier-Entwicklungen

In diesem Abschnitt werden wir uns nun dem Verhalten der Fourier-Entwicklung einer schwach modularen Funktion widmen, was uns die Definition der Modulformen ermöglicht, unser ursprüngliches Ziel.

Im weiteren Verlauf fassen wir $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ als die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ auf, die periodisch sind mit Periode 1.

Zunächst werden wir die Eigenschaften der Fourier-Entwicklung einer solchen Funktion betrachten, um dies dann für allgemeine schwach modulare Funktionen zu verwenden.

Zuvor noch folgende

(2.1) Definition (Schnell fallende Folge)
Eine Folge $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $\{n^k d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ beschränkt ist. ◇

(2.2) Satz (Fourier-Entwicklung)
Sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ und sei $c_n(g) := \int_0^1 g(t)e^{-2\pi int}dt$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{2\pi inx} \tag{4}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gleichmäßig. Weiterhin sind die Fourier-Koeffizienten $c_n(g)$ schnell fallend. ◇

Beweis
Da die Bedingung für schnelles Fallen Beschränktheit einer Folge fordert, brauchen wir nur alle bis auf endlich viele Glieder dieser Folge zu betrachten. Sei hier also $n \neq 0$. Partielle Integration liefert beispielsweise für $k = 2$

$$\begin{aligned} |c_n(g)| &= \left|\int_0^1 g(t)e^{-2\pi int}dt\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2\pi in}\int_0^1 g'(t)e^{-2\pi int}dt\right| \\ &= \left|-\frac{1}{4\pi^2n^2}\int_0^1 g''(t)e^{-2\pi int}dt\right| \leq \frac{1}{4\pi^2|n|^2}\int_0^1 |g''(t)|dt. \end{aligned}$$

Offensichtlich können wir durch Iteration der partiellen Integration eine beliebige Potenz von n im Nenner des Bruches erzeugen, da der Exponent bei jedem Schritt der partiellen Integration um 1 wächst. Allgemein erhalten wir

$$|c_n(g)\cdot n^k| \leq C_k := \frac{1}{(2\pi)^k}\int_0^1 |g^{(k)}(t)|dt,$$

sodass die Koeffizientenfolge tatsächlich schnell fallend ist. Hieraus folgt mit dem Majorantenkriterium auch direkt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|$, da beispielsweise die Reihe über $C_2|n|^{-2}$ konvergiert und eine Majorante von $|c_n(g)|$ ist.

Weiter ist $|e^{2\pi inx}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also konvergiert auch $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)e^{2\pi inx}|$, und dies sogar gleichmäßig, weil die Schranken C_k nicht von x abhängen. Da aus absoluter Konvergenz dieser Reihe aber Konvergenz folgt, haben wir die Behauptungen bezüglich der Reihe auf der rechten Seite von (4) bewiesen.

Nun bleibt also noch zu zeigen, dass diese Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau gegen $g(x)$ konvergiert, also die Fourierentwicklung von g ist.

Nehmen wir an, wir hätten dies für $x = 0$ gezeigt. Dann wären wir bereits fertig, denn sei $g_x(t) := g(x+t)$, so gilt

$$g(x) = g_x(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g_x) \underbrace{e^{2\pi i n \cdot 0}}_{=1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g_x)$$

für alle x. Mit der Definition unserer Koeffizienten c_n folgt

$$\begin{aligned} c_n(g_x) &= \int_0^1 g_x(t) e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \int_0^1 g(x+t) e^{-2\pi i n t} dt \\ &= e^{2\pi i n x} \int_0^1 g(x+t) e^{-2\pi i n (x+t)} dt \\ &\overset{\text{Integrand periodisch}}{=} e^{2\pi i n x} \int_0^1 g(s) e^{-2\pi i n (s)} ds \\ &= e^{2\pi i n x} c_n(g) \end{aligned}$$

und somit auch die Behauptung, falls sie für $x = 0$ gilt.

Um Letzteres zu beweisen, betrachten wir auch hier wieder nur einen Spezialfall, nämlich $g(0) = 0$. Sei ansonsten $h(x) = g(x) - g(0)$. Dann erhalten wir für die Koeffizienten im Falle von $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n(h) &= \int_0^1 h(t) e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i n t} dt - g(0) \int_0^1 e^{-2\pi i n t} dt \\ &= c_n(g) + \frac{g(0)}{2\pi i n} \underbrace{\left(e^{-2\pi i n} - 1\right)}_{=0} = c_n(g) \end{aligned}$$

und für $n = 0$ noch einfacher

$$c_0(h) = \cdots = c_n(g) - g(0) \int_0^1 \underbrace{e^{-2\pi i n t}}_{=1} dt = c_n(g) - g(0).$$

Da wir bereits gezeigt hätten, dass die Behauptung für h gilt, da $h(0) = 0$ ist, wäre

$$g(0) = h(0) + g(0) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(h)\right) + g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) \; - g(0) + g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g),$$

wie gewünscht.

Nun bleibt also nur noch für $g(0) = 0$ zu zeigen, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) = 0$ ist. Dazu nehmen wir die Hilfsfunktion

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^{2\pi ix} - 1}.$$

Sowohl Nenner als auch Zähler sind von der Periode 1 und wegen $g(\mathbb{Z}) = \{0\}$ ist h in $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Wir berechnen weiter

$$c_n(g) = \int_0^1 h(t)(e^{2\pi it} - 1)e^{-2\pi int}dt = c_{n-1}(h) - c_n(h),$$

sodass wir aus $h \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ und der daraus resultierenden, zu Beginn des Beweises gezeigten absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(h)$ die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)$ wie folgt auftrennen dürfen, was die Behauptung liefert:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_{n-1}(h) - c_n(h)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n-1}(h) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(h) = 0.$$

□

Wir wollen nun die Brücke zu den im ersten Abschnitt betrachteten schwach modularen Funktionen schlagen. Diese sind zwar auf der oberen Halbebene der komplexen Zahlen definiert, jedoch können wir sie für festes $y \in \mathbb{H}$ als Funktion der Form $f_{(y)} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x+iy)$ auffassen, solange kein Pol auf der Geraden $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) = y\}$ vorliegt. Da außerdem nach Lemma (1.5) $f_{(y)}(x) = f_{(y)}(x+1)$ gilt, erhalten wir in diesem Fall $f_{(y)} \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Aufgrund dieser Konstruktion können wir Satz (2.2) anwenden, sodass wir f wie folgt in eine Fourier-Reihe entwickeln können, falls auf der Geraden $\operatorname{Im}(z) = y$ kein Pol vorliegt:

$$f(x+iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(y) e^{2\pi inx}.$$

Wir wissen ebenfalls bereits, dass die Folge $c_n(y)$ schnell fallend ist. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir das folgende

(2.3) Lemma (Fourier-Entwicklung schwach modularer Funktionen)
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $c_n(y) = a_n e^{-2\pi n y}$ für eine Konstante $a_n \in \mathbb{C}$. Also lässt sich f schreiben als

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z}, \tag{5}$$

wobei die Folge $\{a_n e^{-a|n|}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ für alle $a > 0$ schnell fallend ist. ◇

Beweis
Sei $y > 0$ so, dass auf der Geraden $\mathrm{Im}(z) = y$ kein Pol von f liegt. Dort wo f holomorph ist, gilt bekanntlich $f_x(x+iy) + i f_y(x+iy) = 0$. Dies führt uns zu der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (f_x(x+iy) + i f_y(x+iy)) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_0^1 f_x(x+iy) e^{-2\pi i n x} dx + i \int_0^1 f_y(x+iy) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \underbrace{\left[f(x+iy) e^{-2\pi i n x} \right]\Big|_0^1}_{=0,\text{ da } f \text{ 1-periodisch ist}} + 2\pi i n \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n x} dx + i \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= 2\pi i n c_n(y) + i c_n'(y),
\end{aligned}$$

die zu

$$c_n'(y) = -2\pi n c_n(y)$$

äquivalent ist. Diese Differentialgleichung hat die bekannten Lösungen

$$c_n(y) = a_n e^{-2\pi n y}$$

für alle $a_n \in \mathbb{C}$.

Weiter gilt für $a > 0$

$$\left| a_n e^{-a|n|} \right| \leq \left| a_n e^{-an} \right| = \left| a_n e^{-2\pi n \frac{a}{2\pi}} \right| = \left| c_n \left(\frac{a}{2\pi} \right) \right|,$$

sodass die Folge $\{a_n e^{-a|n|}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ schnell fallend ist, da dies für $\{c_n(\frac{a}{2\pi})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ wegen $\frac{a}{2\pi} > 0$ bereits aus Lemma (2.2) bekannt ist. □

§3 Modulformen

Die im letzten Abschnitt bewiesene Darstellung schwach modularer Funktionen ermöglicht es uns, sie als Funktion abhängig von $q := e^{2\pi iz}$ zu schreiben. Im weiteren Verlauf werden wir diese Bezeichnung beibehalten.

(3.1) Definition (Modulare Funktionen, Modulformen, Spitzenformen)
Mit den Bezeichnungen aus Lemma (2.3) heißt eine schwach modulare Funktion f, für die ein $M \geq 0$ existiert, sodass f im Bereich $\mathrm{Im}(z) > M$ keine Polstelle besitzt, *modulare Funktion*, falls sie meromorph in ∞ ist, d.h., dass es ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a_n = 0$ für $n < n_0$.

Ist f zusätzlich holomorph auf $\mathbb{H}$ und holomorph in ∞, d.h. $a_n = 0$ für jedes $n < 0$, dann heißt f *Modulform*.

Gilt zusätzlich noch $a_0 = 0$, so heißt f *Spitzenform*. Man sagt dann auch, dass f in ∞ verschwindet. $\diamond$

Die Einschränkung bei den modularen Funktionen sorgt dafür, dass wir keinen Häufungspunkt von Polstellen in ∞ erhalten, da f dann nicht mehr meromorph in ∞ ergänzbar wäre.

Da $z \in \mathbb{H}$ ist, folgt für Modulformen $q \in B_1(0) \setminus \{0\}$, also lässt f sich auffassen als Verkettung von $z \mapsto q$ und einer Funktion auf dem Einheitskreis, die in 0 holomorph fortsetzbar ist.

Die uns bereits bekannten Eisensteinreihen G_k dienen hier für gerade $k \geq 4$ als Beispiele für Modulformen, was wir hier gleich zeigen werden. Wir erinnern uns, dass die Eisensteinreihen G_k dann schwach modular vom Gewicht k sind, wie in einem der vorherigen Vorträge gezeigt wurde, auch wenn diese Eigenschaft dort noch nicht die erst in diesem Vortrag eingeführte Bezeichnung hatte.

(3.2) Proposition (Eisenstein-Reihen)
Sei $k \geq 4$ gerade. Dann gilt mit $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$, der k-ten Teilerpotenzsumme:

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n. \tag{6}$$

$\diamond$

Beweis
Zunächst leiten wir uns eine Identität her, die wir im weiteren Verlauf des Beweises benötigen werden. Dazu verwenden wir zwei verschiedene Darstellungen des Cotangens.

Die erste ist uns bereits bekannt als die Partialbruchzerlegung des Cotangens

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}\right).$$

Die zweite Darstellung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\pi\cot(\pi z) &= \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\frac{\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{2}}{\frac{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}{2i}} = \pi i\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}} = \pi i\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1}\\ &= \pi i\frac{q+1}{q-1} = \pi i - \frac{2\pi i}{1-q} = \pi i - 2\pi i\sum_{d=0}^{\infty} q^d.\end{aligned}$$

Wir differenzieren hier $(k-1)$-fach nach z und erhalten

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}\right)\right) = (-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+m)^k},$$

da die letzte Reihe für $k \geq 4$ absolut konvergiert, also unabhängig von der Reihenfolge der Summation ist. Die zweite Darstellung führt zu

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\pi i - 2\pi i\sum_{d=0}^{\infty} e^{2d\pi iz}\right) = -(2\pi i)^k\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1}e^{2d\pi iz}.$$

Gleichsetzen liefert uns

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1}e^{2d\pi iz}, \tag{7}$$

da k gerade ist. Diese Identität werden wir nach kurzer Umformung in die Definition der Eisenstein-Reihe einsetzen. Hierbei erinnern wir uns, dass

$$\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k}$$

und somit

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(nz+m)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^k} \\
&\overset{(7)}{=} 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1}e^{2d\pi inz} \\
&= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1}q^{nd}.
\end{aligned}$$

Wir sortieren nun die Doppelsumme nach dem Exponenten $a := nd$ von q. Für jedes solche $a \in \mathbb{N}$ erhalten wir dann gerade so viele Summanden wie es Teiler d von a gibt, sodass der Koeffizient von q^a die Teilerpotenzsumme $\sigma_{k-1}(a)$ ist:

$$\begin{aligned}
\ldots &= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{d|a} d^{k-1}q^a \\
&= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{a=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(a)q^a. \qquad \square
\end{aligned}$$