Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 19.10.2010

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 1

Abgabe bis Freitag, den 29.10.2010, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und es bezeichne $X := \operatorname{Spec}(R)$ die Menge der Primideale von R. Zeigen Sie: Die Mengen der Form

$$\mathbb{V}(F) := \{\mathfrak{p} \in X \mid F \subset \mathfrak{p}\}$$

für $F \subset R$ bilden die abgeschlossen Mengen einer Topologie auf X. D.h. die Mengen der Form $X \setminus \mathbb{V}(F)$ erfüllen die Axiome einer Topologie auf X. Beschreiben Sie den Abschluss einer Teilmenge von X. Wann ist X irreduzibel?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) X ist Noethersch.

(2) Jede Menge abgeschlossener Teilmengen von X hat ein minimales Element bezüglich Inklusion.

(3) Jede offene Teilmenge von X ist quasi-kompakt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(1) Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie: Y ist irreduzibel genau dann wenn der Abschluss $\overline{Y}$ von Y irreduzibel ist.

(2) Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Zeigen Sie: Wenn X irreduzibel ist, dann ist auch $f(X)$ irreduzibel.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(1) Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $p \in k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom. Gibt es einen Zusammenhang zwischen einer Faktorisierung von p in $k[T]$ und den irreduziblen Komponenten von $\mathbb{V}(p) \subset \mathbb{A}^n$?

(2) Geben Sie ein Beispiel für eine zusammenhängende nicht irreduzible affine Varietät.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, I das von $x^2 - y^3$ und $y^2 - z^3$ erzeugte Ideal im Polynomring $k[x,y,z]$ und $X = \mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^3$. Definiere $\psi : k[x,y,z] \to k[T]$ durch $\psi(X) = T^9, \psi(Y) = T^6$ und $\psi(Z) = T^4$. Zeigen Sie:

(1) Jedes Element von $k[x,y,z]/I$ besitzt einen Vertreter der Form $a + bx + cy + dxy$ mit $a,b,c,d \in k[z]$.

(2) Für $f = a + bx + cy + dxy$ mit $a,b,c,d \in k[z]$ und $\psi(f) = 0$ gilt $f = 0$.

(3) $\ker(\psi) = I$ und I ist ein Primideal.

(4) Es sei $\overline{\psi} : k[X] \to k[T]$ der von ψ induzierte Restklassenmorphismus. Bestimmen Sie den Morphismus $\phi : \mathbb{A}^1 \to X$ mit $\phi^* = \psi$.

(5) ϕ is bijektiv aber kein Isomorphismus.

Zusatzaufgabe (1 Zusatzpunkt)

Studieren Sie die Bilder algebraischer Varietäten im 2. Stock Hauptgebäude und Treppenhaus. Versuchen Sie das Aussehen der Flächen anhand der Gleichung zu begründen.