Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 26.4.2011

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 10

Abgabe bis Dienstag, den 3.5.2011, 10:00 Uhr

Es sei stets K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 32 (5 Punkte)

Es sei $\mathcal{G}$ eine algebraische Gruppe und $\mathcal{X}$ eine $\mathcal{G}$-Varietät. Zeigen Sie dass der universelle Quotient $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ in der Kategorie der geringten Räume existiert. Zu zeigen ist also: Es existiert ein geringter Raum $\mathcal{Y}$ mit einem Morphismus $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (von geringten Räumen) so dass π auf den $\mathcal{G}$-Bahnen in $\mathcal{X}$ konstant ist und π ist universell mit dieser Eigenschaft, d.h. für jeden Morphismus $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ von geringten Räumen so dass ϕ auf den $\mathcal{G}$-Bahnen in $\mathcal{X}$ konstant ist existiert genau ein Morphism $\psi\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ so dass $\phi = \psi \circ \pi$.

Hinweis: Definieren Sie $\mathcal{Y}$ als Menge als den Bahnenraum $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ und $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ als die Restklassenabbildung. Versehen Sie $\mathcal{Y}$ mit der Quotiententopologie, d.h. $U \subset \mathcal{Y}$ offen $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U) \subset \mathcal{X}$ offen. Definieren Sie die Garbe $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$ durch

$$\mathcal{O}_\mathcal{Y}(U) = \{f\colon U \to K \mid f \circ \pi\colon \pi^{-1}(U) \to K \text{ liegt in } \mathcal{O}_\mathcal{X}(\pi^{-1}(U))\}$$

für $U \subset \mathcal{Y}$ offen.

Aufgabe 33 (5 Punkte)

Die Charakteristik von K sei Null. (Um den Beweis von Satz 13 anwenden zu können.)

(1) Es sei $\mathcal{G} = \mathrm{Sl}_2$ und $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in K^\times,\ b \in K \right\}$. (Vergleiche Aufgabe 28 (1).) Bestimmen Sie den Quotienten $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

(2) Es sei $\mathcal{G} = \mathrm{Gl}_2$ and $\mathcal{H} = \mathcal{Z}(\mathcal{G})$ die normale abgeschlossene Untergruppe der invertierbaren Skalarmatrizen. (Vergleiche Aufgabe 28 (2)). Finden Sie eine abgeschlossene Einbettung von $\mathrm{PGl}_2 := \mathcal{G}/\mathcal{H}$ in $\mathrm{Gl}_4 = \mathrm{Gl}_{2^2}$.