Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 5.7.2011

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 18

Abgabe bis Dienstag, den 12.7.2011, 10:00 Uhr

Es sei stets K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 48 (5 Punkte, VL 27)

Es sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe, $T \leqslant G$ ein abgeschlossener Torus, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine rationale Darstellung. Es sei $Y \subset \mathbb{P}(V)$ eine nicht leere abgeschlossene T-stabile Menge (bzgl. der durch ρ auf $\mathbb{P}(V)$ induzierten Operation). Zeigen Sie:

(1) Es gibt einen Morphismus $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to T$ von algebraischen Gruppen so dass die induzierte Operation von $\mathbb{G}_m$ auf Y dieselben Fixpunkte hat wie die Operation von T auf Y.

(2) Ist $\dim(Y) \geqslant 1$ so hat T mindestens zwei Fixpunkte.

(3) Ist $\dim(Y) \geqslant 2$ so hat T mindestens drei Fixpunkte. (Hinweis: Ist $W \leqslant V$ ein Untervektorraum der Kodimension 1 und $X \subset \mathbb{P}(V)$ abgeschlossen, irreduzibel, von positiver Dimension mit $X \nsubseteq \mathbb{P}(W)$. Dann ist $X \cap \mathbb{P}(W)$ nicht leer und jede irreduzible Komponente von $\mathbb{P}(W) \cap X$ hat Kodimension 1 in X.)

(4) Falls $\dim(G/B) \geqslant 2$ für eine Boreluntergruppe B von G, dann besteht die Weylgruppe von G aus mindestens drei Elementen.

Aufgabe 49 (5 Punkte, VL 27)

Die Charakteristik von K sei ungleich 2. Es sei $J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und

$$G := \mathrm{Sp}_4 := \{g \in \mathrm{Gl}_4 \,|\, g^T J g = J\}.$$

Zeigen Sie dass $T := G \cap D_4$ ein maximaler Torus in G ist mit $C_G(T) = T$. Bestimmen Sie die Weylgruppe $W = W(G, T)$ und erzeugende Spiegelungen von W.