Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 12.11.2010

# Algebraische Gruppen, Übungsblatt 3

Abgabe bis Freitag, den 26.11.2010, 10:00 Uhr

Es sei stets $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

**Aufgabe 10** (5 Punkte)

Zeigen Sie dass jede endliche Gruppe als algebraische Gruppe über $k$ aufgefasst werden kann. Beschreiben Sie die zugehörige Hopf-Algebra (Komultiplikation, Antipode,...). Beschreiben Sie die Hopf-Algebra von mindestens zwei linearen algebraischen Gruppen aus Kapitel I, Beispiel 1.3.

**Aufgabe 11** (5 Punkte)

(1) Zeigen Sie dass $\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \mathrm{Gl}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{T}_n$ und $\mathrm{U}_n$ zusammenhängend sind.

(2) Zeigen Sie:

(a) Die $\mathrm{Sl}_n$ wird von den Untergruppen $G_{ij} (i \neq j)$ erzeugt. Hierbei bezeichnet $G_{ij}$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Einsen auf der Diagonalen, einem beliebigen Eintrag auf Position $(i, j)$ und Nullen sonst.

(b) Die $\mathrm{Sl}_\mathrm{n}$ ist zusammenhängend.

(3) Die Charakteristik von $k$ sei ungleich zwei. Ist die $\mathrm{O}_n$ zusammenhängend?

**Aufgabe 12** (5 Punkte)

(1) Bestimmen Sie die Bahnen der Standardoperation von $\mathrm{Gl}_n, \mathrm{Sl}_n$ und $\mathrm{D}_n$ auf $k^n$. Welche Bahnen sind abgeschlossen?

(2) Finden Sie eine abgeschlossene Einbettung von $\mathbb{G}_a^n = (k^n, +)$ in eine $\mathrm{Gl}_m$.

**Aufgabe 13** (5 Punkte)

Es sei $G$ eine lineare algebraische Gruppe und $H \leqslant G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie:

(1) Für $g \in G$ gilt $\rho_g(\mathbb{I}_G(H)) \subset \mathbb{I}_G(H)$ genau dann wenn $g$ in $H$ liegt.

(2) Es gibt einen endlich dimensionalen $k$-Vektorraum $V$, einen Untervektorraum $W$ von $V$ und eine abgeschlossene Einbettung $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ so dass $\phi(H)$ der Stabilisator von $W$ ist. (Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis von Kapitel I, Satz 2.8 und betrachten Sie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{I}_G(H)$.)

**Zusatzaufgabe** (3 Punkte)

Es sei $G$ eine zusammenhängende algebraische Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein endlicher Normalteiler. Zeigen Sie: $N$ liegt im Zentrum $Z(G) := \{g \in G | gh = hg \ \forall h \in G\}$.