Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 10.12.2010

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 5

Abgabe bis Montag (!), den 10.1.2011, 10:00 Uhr

Es sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 18 (5 Punkte)

(1) Die Charakteristik von k sei Null.

   (a) Es seien $n, m \geqslant 1$ und $\phi : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^m$ ein Morphismus algebraischer Gruppen. Zeigen Sie: ϕ ist k-linear, d.h. $\phi(\lambda g) = \lambda\phi(g)$ für alle $g \in \mathbb{G}_a^n$ und $\lambda \in k$. (Nach Satz 4.15 ist also die Kategorie der abelschen unipotenten Gruppen äquivalent zur Kategorie der endlich dimensionalen k-Vektorräume.)

   (b) Die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{G}_a^n = (k^n, +)$ sind genau die Untervektorräume von k^n. Gilt das auch in positiver Charakteristik?

(2) Es sei $\mathrm{Char}(k) = p > 0$. Zeigen Sie: Für $f \in k[T] = k[\mathbb{G}_a]$ gilt $f \in \mathcal{A}(\mathbb{G}_a)$ genau dann wenn f von der Form $f = \lambda_n T^{p^n} + \lambda_{n-1} T^{p^{n-1}} + \cdots + \lambda_1 T^p + \lambda_0 T$ ist, wobei $\lambda_i \in k$ für $i = 0, \ldots, n$.

Aufgabe 19 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

(1) U_n ist ein abgeschlossener Normalteiler in T_n und $T_n \simeq U_n \rtimes D_n$. ($D_n$ operiert durch Konjugation auf U_n.)

(2) T_n ist auflösbar.

Aufgabe 20 (5 Punkte)

(1)

   (a) Was ist $X^*(\mathbb{G}_a)$?

   (b) Zeigen Sie: $X^*(\mathrm{Sl}_n) = \{1\}$. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 11,(2),(a).)

   (c) Zeigen Sie: $X^*(\mathrm{Gl}_n) = \{\det^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$.

(2) Es sei G eine lineare algebraische Gruppe mit $G = [G, G]$. Zeigen Sie: $X^*(G) = \{1\}$.

Aufgabe 21 (5 Punkte)

(1) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $G \mapsto X^*(G)$ eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der diagonalisierbaren linearen algebraischen Gruppen und der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen, die keine Elemente der Ordnung $\mathrm{Char}(k)$ besitzen, definiert. Zu zeigen ist also:

(a) Ist $\mathrm{Char}(k) = p > 0$ und G eine diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe so ist $\chi^p \neq 1$ für alle $\chi \in X^*(G)$, $\chi \neq 1$.

(b) Ist $\phi : G \to H$ ein Morphismus diagonalisierbarer linearer algebraischer Gruppen, so ist durch $\psi(\phi)(\chi) = \chi \circ \phi$ ein Gruppenmorphismus $\psi(\phi) : X^*(H) \to X^*(G)$ definiert und

$$\psi : \mathrm{Hom(G, H)} \to \mathrm{Hom}(X^*(H), X^*(G))$$

ist bijektiv.

(c) Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe A die kein Element der Ordnung $\mathrm{Char}(k)$ besitzt gibt es eine diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe mit $X^*(G) \simeq A$.

(2) Folgern Sie weiter, dass jede diagonalisierbare lineare algebraische Gruppe das direkte Produkt eines Torus und einer endlichen abelschen Gruppe ist.

(3) Zeigen Sie: In (1) entsprechen Tori den endlich erzeugten freien abelschen Gruppen und abgeschlossene Einbettungen algebraischer Gruppen entsprechen surjektiven Morphismen abelscher Gruppen.

$$\spadesuit$$
$$\pm$$
$$\gg\ll$$
$$\gg \heartsuit \ll$$
$$\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg \Diamond \ll\ll<$$
$$\gg\gg\ll\ll$$
$$\gg\gg \circ \ll\ll$$
$$\gg G \gg\ll H \ll$$
$$\gg\gg\gg \phi \ll\ll\ll\ll$$
$$\Uparrow\gg \otimes \gg\gg\ll\ll \oplus \ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg\gg\gg k[G] \ll\ll\ll\ll<$$
$$\gg \rtimes \gg\gg\ll\ll\trianglelefteq\ll$$
$$\gg\gg\gg\gg\simeq\ll\ll\ll\ll$$
$$\gg\gg X \gg\gg\ll\ll\ll Y \ll$$
$$\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg\cong\ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg \mathbb{G}_a \gg\gg\gg\ll\ll\ll \mathbb{G}_m \ll\ll<$$
$$||$$
$$\Longleftrightarrow$$

Wir wünschen allen
frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!