Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 7.1.2011

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 6

Abgabe bis Freitag, den 21.1.2011, 10:00 Uhr

Es sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 22 (5 Punkte, VL 11)

Es sei $G = \mathrm{Gl}_n$ und $H = \mathrm{D}_n \leqslant G$. Weiter bezeichne M die Menge der monomialen Matrizen, d.h. alle Matrizen mit genau einem Eintrag ungleich Null in jeder Zeile und Spalte. Zeigen Sie:

(1) M ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.

(2) $\mathcal{N}_G(H) = M$.

(3) $\mathcal{C}_G(H) = H$.

(4) $\mathcal{N}_G(H)/\mathcal{C}_G(H) \simeq S_n$.

Aufgabe 23 (5 Punkte, VL 11)

Die Charakteristik von k sei Null. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 15 (ohne Satz 5.13 zu verwenden) dass jede eindimensionale unipotente lineare algebraische Gruppe isomorph zu $\mathbb{G}_a$ ist.

Aufgabe 24 (5 Punkte, VL 12)

(1) Ist der Morphismus ϕ aus Aufgabe 5 birational?

(2) Es seien X und Y irreduzible Varietäten, U und U' nicht leere offene Teilmengen von X und $f : U \to Y$, $f' : U' \to Y$ Morphismen. Dann heißen f und f' äquivalent falls $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$. Zeigen Sie dass hierdurch tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert wird. Eine Äquivalenzklasse heißt rationale Abbildung (von X nach Y). Zeigen Sie, dass es für jede rationale Abbildung g von X nach Y eine (eindeutig bestimmte) größte offene Menge $U \subset X$ gibt so dass ein Vertreter $f : U \to Y$ von g existiert. Eine rationale Abbildung heisst dominant falls ein (und somit jeder) Vertreter dichtes Bild hat. Definieren Sie die Komposition von dominanten rationalen Abbildungen.

Aufgabe 25 (5 Punkte, VL 12)

Es seien X und Y irreduzible Varietäten. Zeigen Sie: Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen den dominanten rationalen Abbildungen von X nach Y (siehe Aufgabe 24) und den k-Algebrenmorphismen von $k(Y)$ nach $k(X)$.
(Es folgt dann dass die Kategorie der irreduziblen Varietäten mit den dominanten rationalen Abbildungen anti-äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen von k ist.)