Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 5.4.2011

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 7

Abgabe bis Dienstag, den 12.4.2011, 14:00 Uhr

Es sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 26 (5 Punkte, VL 14)

Es seien $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten und $\phi : X \to Y$ ein Morphismus. Dann ist ϕ durch m Polynome $p_1, \dots, p_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben, also $\phi(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x)) \in Y$ für alle $x \in X$. Es sei nun $x \in X$ fix gewählt und $y = \phi(x)$. Nach Prop. 6.14 können wir T_xX (bzw. T_yY) mit einem Untervektorraum von k^n (bzw. k^m) identifizieren. Zeigen Sie: Für $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_xX \subset k^n$ gilt $(\mathrm{d}\,\phi)_x(v) = w = (w_1, \dots, w_m) \in T_yY \subset k^m$ mit $w_j = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial p_j}{\partial T_i}(x)$.

Aufgabe 27 (5 Punkte, VL 14)

(1) Es sei $X = \mathbb{V}(T_1 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^2$ und $\phi\colon X \to \mathbb{A}^1$ gegeben durch $\phi(x_1, x_2) = x_1$. Zeigen Sie: $(\mathrm{d}\,\phi)_x$ ist ein Isomorphismus für $x \in X \setminus \{(0,0)\}$. Was passiert bei $x = (0,0)$?

(2) Es sei $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_m \subset \mathbb{A}^1$ die Determinantenabbildung und $e \in \mathrm{GL}_n$ bezeichne die Einheitsmatrix. Zeigen Sie: $(\mathrm{d}\det)_e(A) = A_{11} + \cdots + A_{nn}$ für $A \in k^{n\times n} = T_e\,\mathrm{GL}_n$. In Worten: Das Differential der Determinante ist die Spur.

Zusatzaufgabe (5 Punkte, VL 13)

Bestimmen Sie $\mathrm{Sing}(X)$ für mindestens zwei der Flächen X auf den Bildern im 2. Stock, Hauptgebäude. Können Sie $\mathrm{Sing}(X)$ auf den Bildern sehen?