Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
C. Schnackers

Aachen, den 30. März 2011

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Übungsblatt 0

Abgabe bis Montag, den 11.04.2011, 9:45 Uhr

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben schriftlich. Sie können Ihre Lösungen bis Montag den 11. April, 9:45 Uhr, abgeben. Werfen Sie diese, versehen mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und die Nummer Ihrer Diskussionsgruppe, in den Übungskästen des Lehrstuhls A (vor Raum 155, Hauptgebäude) ein.

Aufgabe 1 (1+2+1+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass φ 2π-periodisch ist.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der x_1-Achse und x_2-Achse.

c) Bestimmen Sie die Ableitung.

d) Bestimmen Sie den Tangentenvektor für alle s mit $\varphi(s) = 0$.

e) Skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

a) Gegeben sei für $q < 1$ die Abbildung

$$T : (C[0,q], \|.\|_\infty) \to (C[0,q], \|.\|_\infty), f \to T(f) \text{ mit } T(f)(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung genau einen Fixpunkt besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = x$ in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie den Banachschen Fixpunktsatz und den Mittelwertsatz.

Aufgabe 3 (1+1 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} e^{-x}\cos(x) \\ e^{-x}\sin(x) \end{pmatrix}$$

das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

löst.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} - c + \pi\mathbb{Z} \right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x + c)$$

für $c \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2$$

löst.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$