Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
12. April 2011

Aachen, den 12. April 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 1

Wird besprochen am Dienstag, den 26. April 2011, 11:30 Uhr

Aufgabe 1 Es sei M ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset M$ nennt man *zusammenhängend*, wenn für alle offenen $U, V \subset M$ gilt: Falls $A \cap U \cap V = \emptyset$ und $A \subset U \cup V$, so folgt bereits $A \subset U$ oder $A \subset V$. Wir definieren eine binäre Relation Z auf M wie folgt (für $m, n \in M$):

$$mZn \Leftrightarrow \exists A \subset M \text{ zusammenhängend mit } \{m, n\} \subset A$$

Zeigen Sie:

(a) Durch Z wird eine Äquivalenzrelation definiert.

Die Äquivalenzklassen bezüglich Z nennt man *Zusammenhangskomponenten*.

(b) Die Zusammenhangskomponente von $m \in M$ ist die bezüglich Inklusion maximale zusammenhängende Teilmenge von M, die m enthält.

(c) Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

Aufgabe 2 Es sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}_e$ gibt es eine symmetrische Umgebung $V \in \mathcal{U}_e$ mit $VV = \{xy : x, y \in V\} \subset U$. Dabei nennt man V symmetrisch, falls für alle $x \in V$ auch $x^{-1} \in V$ ist.

(b) Ist H eine Untergruppe von G, so ist auch $\overline{H}$ eine Untergruppe.

(c) Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G, so ist G/H ein Hausdorff-Raum.

Dabei besitze G/H folgende Topologie: Eine Menge $U \subset G/H$ ist offen, wenn $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ für die kanonische Projektion $p : G \to G/H$ ist.

(d) Ist H ein Normalteiler von G, so ist G/H eine topologische Gruppe.

Aufgabe 3 Einen topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ nennt man T_1-Raum, wenn:

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : y \notin U$$

Zeigen Sie:

(a) Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$ ist genau dann ein T_1-Raum, wenn für alle $m \in M$ die einelementigen Mengen $\{m\}$ abgeschlossen sind.

(b) Ist $(G, \mathcal{T})$ eine beliebige topologische Gruppe, dann ist $\overline{\{1\}}$ ein abgeschlossener Normalteiler von G.

(c) Ist $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, die ein T_1-Raum ist, dann ist $(G, \mathcal{T})$ sogar ein Hausdorff-Raum.

(d) Die Faktorgruppe $G/\overline{\{1\}}$ ist ein Hausdorff-Raum.

Aufgabe 4 Es sei $M = \mathbf{R}$ mit der Standardtopologie $\mathcal{T}$ versehen. Zeigen Sie:

(a) Die von den Atlanten $\{(\mathbf{R}, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}})\}$ und $\left\{\left(\mathbf{R}, t \mapsto t^3\right)\right\}$ erzeugten differenzierbaren Strukturen $\mathcal{F}_0$ bzw. $\mathcal{F}_1$ sind verschieden.

(b) Die Mannigfaltigkeiten $(M, \mathcal{T}, \mathcal{F}_0)$ und $(M, \mathcal{T}, \mathcal{F}_1)$ sind diffeomorph.