Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
27. April 2011

Aachen, den 5. Mai 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 2

Wird besprochen am Montag, den 9. Mai 2011, 8:15 Uhr

Aufgabe 5 Begründen Sie (ausführlich!) Bemerkung 3.12 d):

Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $\psi : M \to \mathbf{R}^n$ glatt, $m \in M$ und $v \in T_mM$. Dann gilt $\mathrm{d}\psi_m(v) = (v(\psi_1), \ldots, v(\psi_n))^\top$ (bez. der Basis $\partial_1, \ldots, \partial_n$).

Aufgabe 6

Es sei M ein topologischer Raum. Wir definieren die binäre Relation W auf M durch:

$$m_0 W m_1 \Leftrightarrow \exists \gamma : [0,1] \to M \text{ stetig mit } \gamma(0) = m_0 \text{ und } \gamma(1) = m_1$$

Zeigen Sie:

(a) Durch W wird eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

Die Äquivalenzklassen bezüglich W nennt man *Wegkomponenten von M*.

(b) Jede Wegkomponente ist in einer Zusammenhangskomponente enthalten.

Nun sei M eine Mannigfaltigkeit.

(c) Die Wegkomponenten in M sind offen und abgeschlossen.

(d) Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten stimmen überein.

Aufgabe 7 Es sei $M = S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Einheitssphäre mit der differenzierbaren Struktur aus Beispiel 2.5.

Zu $m \in S^n$ definieren wir

$$\tilde{T}_m S^n = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} : \langle m, x \rangle = 0 \right\}$$

Zu $\gamma : I \to S^n$ glatt mit $0 \in I \subset \mathbf{R}$ offenes Intervall und $\gamma(0) = m$ sei:

$$v_\gamma = \lim_{h \to 0} h^{-1}(\gamma(h) - m) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi_m : \dot{\gamma}(0) \mapsto v_\gamma$ ist ein (wohldefinierter!) Vektorraum-Isomorphismus $\varphi_m : T_m S^n \to \tilde{T}_m S^n$.

Aufgabe 8 Es seien $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ stetig. Ferner sei $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ glatt mit kompaktem Träger. Wir definieren:

$$\psi * f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\psi(x-y)\,\mathrm{d}y$$

Zeigen Sie: $\psi * f$ ist glatt.

Hinweis: Zeigen Sie für alle $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k}(\psi * f) = \left(\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k}\psi\right) * f.$$

Aufgabe 9 Zeigen Sie: Für alle Null-Umgebungen U in $\mathbf{R}^n$ gibt es eine glatte Funktion ψ mit $\psi(x) \geq 0$ für alle x, $\psi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n \setminus U$ und $\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.