Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
12. Mai 2011

Aachen, den 12. Mai 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 3

Wird besprochen am Montag, den 23. Mai 2011, 8:15 Uhr

Aufgabe 10 Es seien $A, B \subset \mathbf{R}^n$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbf{R}^n \to [0, 1]$ mit $f|_A = 1$ und $f|_B = 0$. Zeigen Sie: Ist A oder B kompakt, so kann man f auch glatt wählen.

Aufgabe 11 Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $m \in M$ und $v \in T_m(M)$. Zeigen Sie: Es gibt ein glattes Vektorfeld $X \in V(M)$ mit $X(m) = v$.

Aufgabe 12 Es sei G eine Lie-Gruppe. Es sei $H \subset G$ die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G. Zeigen Sie:

(a) Es ist H ein Normalteiler von G.

(b) Ist $x \in G$, so ist $xH = \{xh : h \in H\}$ die Zusammenhangskomponente von x in G.

Aufgabe 13 Es sei G eine Lie-Gruppe und H eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (i) Die Relativtopologie auf H ist diskret, d. h. jede Teilmenge von H ist offen in H.

  (ii) Es gibt $U \subset G$ offen mit $U \cap H = \{e\}$.

(b) Nun sei G zusammenhängend und H ein Normalteiler mit diskreter Relativtopologie. Zeigen Sie: Es ist H zentral, d. h. für alle $x \in G$ und alle $h \in H$ gilt $xh = hx$. (Hinweis: Für festes $h \in H$ betrachten Sie die Abbildung $G \to H$, $x \mapsto xhx^{-1}$.)

Aufgabe 14 Es sei G eine Lie-Gruppe. Wir versehen den Tangentialraum T_eG mit der differenzierbaren Struktur, die von einem linearen Isomorphismus $T_eG \to \mathbf{R}^n$ induziert wird. Es sei $\varphi : TG \to T_eG$ definiert durch $\varphi(p, v) = \mathrm{d}(\ell_p)|_e^{-1}(v)$. Zeigen Sie: φ ist glatt.