Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
27. Mai 2011

Aachen, den 27. Mai 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 4

Wird besprochen am Montag, den 6. Juni 2011, 8:15 Uhr

Aufgabe 15 Beweisen Sie Lemma 5.13 aus der Vorlesung: Es sei $\varphi : G \to H$ ein glatter Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen. Die Lie-Algebren dazu seien mit $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ bezeichnet. Wir versehen die Tangentialräume T_eG und T_eH mit den von den Identifikationen $T_eG \cong \mathfrak{g}$ und $T_eH \cong \mathfrak{h}$ induzierten Lie-Algebren-Strukturen. Dann ist das Differential $\mathrm{d}\varphi_e : T_eG \to T_eH$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Aufgabe 16 Es sei G eine zusammenhängende topologische Gruppe.

(a) Es sei $U \in \mathcal{U}_e(G)$. Zeigen Sie: $G = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U^n$.

(b) Es seien $\varphi_1, \varphi_2 : G \to H$ stetige Gruppenhomomorphismen in eine topologische Gruppe H. Es gebe $\emptyset \neq U \subset G$ offen mit $\varphi_1(g) = \varphi_2(g)$, für alle $g \in U$. Zeigen Sie $\varphi_1 = \varphi_2$.

Aufgabe 17 Es sei G eine Lie-Gruppe.

(a) Es sei $m : G \times G \to G$ die Multiplikationsabbildung $m(p,q) = pq$. Wir identifizieren den Tangentialraum $T_{(e,e)}(G \times G)$ mit $T_eG \times T_eG$ durch $(v,w)(f) = v(f(\cdot,e)) + w(f(e,\cdot))$. Zeigen Sie $\mathrm{d}m_{(e,e)}(v,w) = v + w$.

(b) Es seien $\varepsilon > 0$, $I = \,]-\varepsilon,\varepsilon[$ und $\alpha,\beta : I \to G$ glatte Kurven mit $\alpha(0) = \beta(0) = e$. Zeigen Sie: Auch $\gamma : I \to G$ definiert durch $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$ ist glatt und es gilt $\dot\gamma(0) = \dot\alpha(0) + \dot\beta(0)$.

(c) Es sei $j : G \to G$ die Inversenabbildung $j(p) = p^{-1}$. Zeigen Sie: $\mathrm{d}j_e(v) = -v$.

Aufgabe 18 Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra der Dimension 2. Zeigen Sie: Entweder gilt $[X,Y] = 0$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ oder es gibt $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $[X,Y] = Y$.

Aufgabe 19 Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe.

(a) Es seien $\varphi, \psi : G \to H$ glatte Gruppenhomomorphismen in eine Lie-Gruppe H mit $\mathrm{d}\varphi_e = \mathrm{d}\psi_e$. Zeigen Sie $\varphi = \psi$.

(b) Für $p \in G$ definieren wir den Diffeomorphismus $\varphi_p : G \to G$ durch $\varphi_p(g) = pgp^{-1}$. Zeigen Sie: Genau dann ist G kommutativ, wenn für alle $p \in G$ gilt $\mathrm{d}(\varphi_p)_e = \mathrm{Id}$.