Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
9. Juni 2011

Aachen, den 25. Juni 2011

# Lie-Gruppen I, Übungsblatt 5

Wird besprochen am Montag, den 27. Juni 2011, 8:15 Uhr

**Aufgabe 20** Es sei $n \in N$.

(a) Zeigen Sie $\exp(ABA^{-1}) = A\exp(B)A^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ und alle $B \in \mathrm{gl}(n, \mathbf{C})$.

(b) Es sei $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbf{C})$ ein Jordanblock

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Geben Sie $\exp(A)$ explizit an.

(c) Skizzieren Sie für beliebiges $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ wie man $\exp(A)$ durch die Jordan-Normalform von $A$ bestimmen kann.

**Aufgabe 21** Es sei $G$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie: Es gibt linear unabhängige $g_1, \ldots, g_k \in G$ mit

$$G = \left\{ \sum_{j=1}^{k} m_j g_j : m_j \in \mathbf{Z} \right\}.$$

*Hinweis*: Verwenden Sie Induktion nach $n$. Im Induktionsschritt nehmen Sie an: Die diskrete Untergruppe $G$ spannt den $\mathbf{R}^{n+1}$ auf. Zeigen Sie mit der Induktionsvoraussetzung die Existenz einer Basis $e_1, \ldots, e_n, f$, für die $G \cap \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$ von $e_1, \ldots, e_n$ erzeugt wird. Wählen Sie $e_{n+1} \in G$ mit minimaler $f$-Koordinate.

**Aufgabe 22** Gegeben seien die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie explizite Formeln für $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ an für $t \in \mathbf{R}$ beliebig unter Verwendung von trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen.

**Aufgabe 23** Es sei $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: Es gibt kein $A \in \mathrm{gl}(2, \mathbf{R})$ mit $\exp(A) = B$.

**Aufgabe 24** Es sei $n \in \mathbf{N}$. Wir definieren $J_n \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ als:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Die *symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ besteht aus denjenigen $p \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ mit:

$$p^\top J_n p = J_n$$

Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ und die zugehörige Lie-Algebra $L\left(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})\right)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{sp}(n, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^\top \end{pmatrix} : A, B, C \in \mathrm{gl}(n, \mathbf{R}), C = C^\top, B = B^\top \right\}.$$