Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
30. Juni 2011

Aachen, den 30. Juni 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 6

Wird besprochen am Montag, den 11. Juli 2011, 8:15 Uhr

Aufgabe 25 Es sei $n \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie: $\exp : \mathrm{gl}(n, \mathbf{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ ist surjektiv.

(*Hinweis*: Reduzieren Sie das Problem zunächst auf Jordanblöcke.)

Aufgabe 26 Geben Sie Matrizen $A, B \in \mathrm{gl}(2, \mathbf{R})$ an mit $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Aufgabe 27 Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Zeigen Sie: Auf $\mathfrak{g}$ existiert eine Norm $\|\cdot\|$ mit $\|[X, Y]\| \leq \|X\|\,\|Y\|$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst mit einer beliebigen Norm $|\cdot|$ auf $\mathfrak{g}$ und geeigneter Konstante $C > 0$, daß $|[X, Y]| \leq C|X||Y|$.)

Aufgabe 28 Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Es gelte $[X, [Y, Z]] = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Zeigen Sie: Durch $X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$ wird eine Gruppenstruktur auf $\mathfrak{g}$ definiert.

Bemerkung: Ein Beispiel für eine solche Lie-Algebra ist die *Heisenberg-Algebra*:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$