Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
18. Juli 2011

Aachen, den 18. Juli 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 7

Wird besprochen am Mittwoch, den 19. Oktober 2011, 14:30 Uhr

Aufgabe 29 Es sei $B \in \mathrm{gl}(n, \mathbf{R})$ und für $v, w \in \mathbf{R}^n$ sei $\beta(v, w) = v^\top B w$.

Zeigen Sie: Die Menge

$$H = \{p \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) : \beta(pv, pw) = \beta(v, w)\, \forall v, w \in \mathbf{R}^n\}$$

ist abgeschlossen. Bestimmen Sie $L(H)$.

Aufgabe 30 Zeigen Sie: Eine Lie-Gruppe G hat keine kleinen Untergruppen, d. h. es gibt eine e-Umgebung $U \subset G$, in der $\{e\}$ die einzige enthaltene Untergruppe von G ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete exponentielle Umgebung.

Aufgabe 31 Es sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Die Topologie sei lokalkompakt, d. h. $\mathcal{T}$ ist Hausdorffsch und jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung. Ferner sei G zusammenhängend.

(a) Zeigen Sie: Die Gruppe G ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen.

(b) Es gebe nun zusätzlich eine abzählbare Basis $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ der e-Umgebungen. D. h. zu $W \in \mathcal{U}_e$ gibt es $n \in \mathbf{N}$ mit $e \in V_n \subset W$.

Zeigen Sie: Jede kompakte Teilmenge ist separabel.

Folgern Sie: Die Gruppe G ist separabel.

(c) Zeigen Sie unter der Zusatzannahme in (b): Die Gruppe G ist ein A_2-Raum.

Aufgabe 32 Es sei:

$$\mathrm{SU}(2) = \{p \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) : p^* p = p p^* = I_2, \det(p) = 1\}$$

(a) Zeigen Sie:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Folgern Sie: Vermöge der Abbildung

$$\mathrm{SU}(2) \ni p \mapsto p \cdot (1, 0)^\top$$

ist $\mathrm{SU}(2)$ homöomorph zur Einheitssphäre in $\mathbf{C}^2$.

(b) Es sei $\mathrm{su}(2) = L(\mathrm{SU}(2))$. Für $X, Y \in \mathrm{su}(2)$ sei $\langle X, Y\rangle = -\operatorname{Spur}(XY)$.

Zeigen Sie: Dies ist ein (reelles) Skalarprodukt auf $\mathrm{su}(2)$.

(c) Zeigen Sie, für alle $p \in \mathrm{SU}(2)$ und alle $X, Y \in \mathrm{su}(2)$, für das Skalarprodukt aus (b):

$$\langle \mathrm{Ad}(p)(X), \mathrm{Ad}(p)(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

(d) Als Folge von (c) kann man, bei geeigneter Identifikation von $\mathrm{su}(2)$ mit $\mathbf{R}^3$, die adjungierte Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ als Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to O(3)$ auffassen.

Zeigen Sie: Die adjungierte Darstellung bildet $\mathrm{SU}(2)$ surjektiv auf $\mathrm{SO}(3)$ ab.

Bestimmen Sie den Kern von Ad.