Hecke-Operatoren, Teil 1

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 31.03.2011
Matthias Klupsch

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Korrespondenzen 1
1.2 Eine Beschreibung durch Matrizen 4

2 Bezug zu Funktionen der oberen Halbebene **6**
2.1 Der Übergang: Funktionen mit Gewicht $2k$ 6
2.2 Schwach modulare Funktionen 7
2.3 Modulare Funktionen 8

3 Schlussbemerkung **10**

§1 Einführung

Anstatt die Hecke-Operatoren direkt für Funktionen der oberen Halbebene zu definieren, sollen zunächst Funktionen, die auf $\mathscr{R} := \{\Gamma \subseteq \mathbb{C} \mid \Gamma \text{ ein Gitter }\}$, der Menge der Gitter von $\mathbb{C}$, definiert sind, betrachtet werden.

— *Korrespondenzen* —

(1.1) Definition
Sei E eine Menge und X_E die freie abelsche Gruppe auf E. Ein Homomorphismus $T : X_E \to X_E$ heißt eine *Korrespondenz* auf E. ◇

Ist T eine Korrespondenz auf der Menge E, so gilt für $x \in E$ also

$$T(x) = \sum_{y \in E} n_y(x) y$$

mit $n_y(x) \in \mathbb{Z}$ und $n_y(x) \neq 0$ für nur endlich viele $y \in E$. Wegen der $\mathbb{Z}$-Linearität ist T durch die Bilder der Elemente von E auch bereits eindeutig festgelegt.

Die Korrespondenzen, um die es im Folgenden gehen soll, sind Bestandteil der nächsten

(1.2) Definition
Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die Korrespondenz $T(n) : X_{\mathscr{R}} \to X_{\mathscr{R}}$ auf $\mathscr{R}$ durch

$$T(n)(\Gamma) = \sum_{\substack{\Gamma' \leq \Gamma \\ (\Gamma : \Gamma') = n}} \Gamma'.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ist die Korrespondenz R_λ auf $\mathscr{R}$ durch

$$R_\lambda(\Gamma) := \lambda\Gamma \quad (\Gamma \in \mathscr{R})$$

gegeben. $\diamond$

(1.3) Bemerkung
Es muss als erstes geklärt werden, dass $T(n)$ wohldefiniert ist, dass also für jedes Gitter $\Gamma \in \mathscr{R}$ die Menge $\Gamma(n) := \{ \Gamma' \leq \Gamma \mid (\Gamma : \Gamma') = n \}$ endlich ist. Sei dazu $\Gamma' \in \Gamma(n)$. Dann gilt $n\omega + \Gamma' = 0$ in Γ/Γ' für alle $\omega \in \Gamma$. Man erhält $n\Gamma \subseteq \Gamma'$ für alle $\Gamma' \in \Gamma(n)$. Wegen $\Gamma/n\Gamma \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, besitzt $\Gamma/n\Gamma$ die Ordnung n^2, sodass

$$(\Gamma' : n\Gamma) = \frac{(\Gamma \ : \ n\Gamma)}{(\Gamma \ : \ \Gamma')} = n$$

für jedes $\Gamma' \in \Gamma(n)$ gilt. Damit besitzt das Bild von Γ' in $\Gamma/n\Gamma$ (bezüglich des kanonischen Epimorphimus) die Ordnung n. Andersherum ist das Urbild einer Untergruppe von $\Gamma'/n\Gamma$ mit Ordnung n bezüglich des kanonischen Epimorphismus ein Element von $\Gamma(n)$. Da $n\Gamma$ in allen Teilgittern mit Index n enthalten ist, steht $\Gamma(n)$ somit in Bijektion zu der Menge der Untergruppen von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ mit Ordnung n und diese ist endlich.

In dem Fall, dass $n = p$ prim ist, sind diese Untergruppen gerade die eindimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}_p^2$, also die Punkte der projektiven Geraden $\mathcal{P}(\mathbb{F}_p^2)$ und deren Anzahl ist $p + 1$. $\diamond$

Als Elemente des Endomorphismenringes von $X_{\mathscr{R}}$ können $T(n)$ und R_λ verknüpft werden. Dabei gelten folgende Regeln:

(1.4) Proposition
Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ und $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd sowie p eine Primzahl. Dann gilt:

a)
$$R_\lambda \circ R_\mu = R_{\lambda\mu}$$

b)
$$R_\lambda \circ T(n) = T(n) \circ R_\lambda$$

c)
$$T(m) \circ T(n) = T(mn)$$

d)
$$T(p^n) \circ T(p) = T(p^{n+1}) + pT(p^{n-1}) \circ R_p.$$

◇

Beweis
Es reicht zu zeigen, dass die angegebenen Endomorphismen auf $\mathscr{R}$ übereinstimmen. Sei dazu $\Gamma \in \mathscr{R}$.

a) Dies folgt aus der Assoziativität der Multipliktation in $\mathbb{C}$, denn es gilt:
$$R_\lambda \circ R_\mu(\Gamma) = R_\lambda(\mu\Gamma) = \lambda(\mu\Gamma) = (\lambda\mu)\Gamma = R_{\lambda\mu}\Gamma.$$

b) Die Korrespondenz R_λ liefert eine Bijektion zwischen $\Gamma(n)$ und $(\lambda\Gamma)(n)$. Es gilt somit
$$\begin{aligned}(R_\lambda \circ T(n))(\Gamma) &= \sum_{\substack{\Gamma' \leq \Gamma,\\ (\Gamma:\Gamma')=n}} \lambda\Gamma' = \sum_{\substack{\Gamma' \leq \lambda\Gamma,\\ (\lambda\Gamma:\Gamma')=n}} \Gamma' \\ &= T(n)(\lambda\Gamma) \\ &= (T(n) \circ R_\lambda)(\Gamma).\end{aligned}$$

c) Sind $\Gamma'' \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$ Teilgitter mit $(\Gamma' : \Gamma'') = m$ und $(\Gamma : \Gamma') = n$, so folgt
$$(\Gamma : \Gamma'') = (\Gamma : \Gamma')(\Gamma' : \Gamma'') = mn.$$

Sei umgekehrt $\Lambda \subseteq \Gamma$ ein Teilgitter mit Index mn. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen, gibt es eine eindeutige Zerlegung
$$\Gamma/\Lambda \cong G_m \oplus G_n$$
mit $|G_m| = m$ und $|G_n| = n$. Damit besitzt Γ/Λ genau eine Untergruppe mit Ordnung m und diese entspricht einer Untergruppe von Γ mit Index n, die Λ enthält (vergleiche auch (1.3)). Damit erhält man nun:
$$\begin{aligned}T(mn)(\Gamma) &= \sum_{\Gamma' \in \Gamma(mn)} \Gamma' \\ &= \sum_{\Gamma' \in \Gamma(m)} \sum_{\Gamma'' \in \Gamma'(n)} \Gamma'' \\ &= T(m)T(n)(\Gamma).\end{aligned}$$

d) Es ist $R_p(\Gamma) = p\Gamma$ ein Teilgitter von Γ mit Index p^2 und somit $(T(p^{n-1}) \circ R_p)(\Gamma)$ eine Summe von Teilgittern von Γ mit Index p^{n+1}. Ebenso sind $T(p^{n+1})(\Gamma)$ sowie $(T(p^n) \circ T(p))(\Gamma)$ Summen von solchen Teilgittern. Sei nun $\Gamma' \in \Gamma(p^{n+1})$ und seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die Koeffizienten von Γ' in $(T(p^n) \circ T(p))(\Gamma)$, $T(p^{n+1})(\Gamma)$ beziehungsweise $T(p^{n-1}) \circ R_p(\Gamma)$. Bei a handelt es sich um die Anzahl der Teilgitter mit Index p, die Γ' enthalten. Nach Definition (1.2) gilt $b = 1$, es gilt also zu zeigen, dass $a = 1 + pc$ gilt. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

   Falls $\Gamma' \nsubseteq p\Gamma$, so ist $c = 0$. Die Ordnung des Bildes von Γ' in $\Gamma/p\Gamma$ teilt p^2 und ist nach Voraussetzung weder 1 (denn $\Gamma' \nsubseteq p\Gamma$) noch p^2 (denn $\Gamma' \neq \Gamma$), also p. Nach Bemerkung (1.3) gibt es somit genau ein Teilgitter von Γ mit Index p, welches Γ' enthält. Es folgt $a = 1$ wie gewünscht.

   Falls stattdessen $\Gamma' \subseteq p\Gamma$, so ist $c = 1$ und jedes Teilgitter von Γ mit Index p enthält $p\Gamma$, also auch Γ' und es folgt $a = 1 + p$ mit Bemerkung (1.3). □

Aus diesen Rechenregeln erhält man nun leicht das folgende

(1.5) Korollar
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Primzahl p ist $T(p^n)$ ein Polynom in $T(p)$ und R_p. ◇

Beweis
Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ klar ist und $n = 2$ sowie der Induktionsschritt mit (1.4) d) erfolgt. □

Dies führt sofort zu dem nächsten Resultat.

(1.6) Korollar
Die von den $T(n)$ und R_λ ($n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}^*$) erzeugte Algebra ist kommutativ. ◇

Beweis
Jedes $T(n)$ ist nach (1.4) c) Produkt von Endomorphismen der Form $T(p^k)$ für p prim und $k \in \mathbb{N}$. Nach dem letzten Korollar ist also die von den $T(p)$ und R_λ (p prim und $\lambda \in \mathbb{C}^*$) erzeugte Algebra schon die gesuchte und nach (1.4) ist diese kommutativ. □

— Eine Beschreibung durch Matrizen —

Sei im Folgenden Γ ein Gitter mit $\{\omega_1, \omega_2\}$ als $\mathbb{Z}$-Basis. Folgendes Lemma liefert eine Beschreibung der Teilgitter von Γ mit Index n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

(1.7) Lemma
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$S_n := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2} | 0 \leq b < d, a \in \mathbb{N}, ad = n \right\}.$$

Für $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in S_n$ definiere

$$\Gamma_\sigma := \langle a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Dann ist die Abbildung $\sigma \mapsto \Gamma_\sigma$ eine Bijektion zwischen S_n und $\Gamma(n)$. $\diamond$

Beweis
Zunächst ist zu zeigen, dass für $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in S_n$ tatsächlich $\Gamma_\sigma \in \Gamma(n)$ gilt. Der durch σ gegebene Endomorphismus

$$\Gamma \to \Gamma, z_1\omega_1 + z_2\omega_2 \mapsto z_1(a\omega_1 + b\omega_2) + z_2 d\omega_2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{Z})$$

hat nach linearer Algebra einen Cokern isomorph zu $\mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/c_2\mathbb{Z}$ mit c_1, c_2 die Invariantenteiler von σ. Dieser Cokern hat somit Ordnung $c_1c_2 = \det(\sigma) = n$ und ist gerade Γ/Γ_σ.

Als nächstes soll eine Umkehrabbildung konstruiert werden. Sei dazu $\Gamma' \in \Gamma(n)$. Die Gruppen

$$Y_1 = \Gamma/(\Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2), Y_2 = \mathbb{Z}\omega_2/(\Gamma' \cap \mathbb{Z}\omega_2)$$

sind zyklisch mit $\omega_1 + (\Gamma' + \omega_2\mathbb{Z})$ beziehungsweise $\omega_2 + (\Gamma' \cap \omega_2\mathbb{Z})$ als Erzeuger. Seien a und d die Ordnungen von Y_1 beziehungsweise Y_2. Betrachte nun die Homomorphismen $\psi_1 : \Gamma/\Gamma' \to Y_1$ und $\psi_2 : Y_2 \to \Gamma/\Gamma'$, die für $m, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ durch

$$\psi_2(m\omega_2 + (\Gamma' \cap \omega_2\mathbb{Z})) = m\omega_2 + \Gamma'$$

und

$$\psi_1((k_1\omega_1 + k_2\omega_2) + \Gamma') = (k_1\omega_1 + k_2\omega_2) + (\Gamma' + \omega_2\mathbb{Z}) = k_1\omega_1 + (\Gamma' + \omega_2\mathbb{Z})$$

gegeben sind. Da ψ_2 durch die Inklusion $\mathbb{Z}\omega_2 \to \Gamma$ induziert ist, ist ψ_2 injektiv. Ebenso ist ψ_1 durch den kanonischen Epimorphimus $\Gamma \to \Gamma/(\Gamma' + \mathbb{Z}\omega_2)$ induziert, also surjektiv. Ist nun $\psi_1(x + \Gamma') = 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $x = \omega + k\omega_2$ mit $\omega \in \Gamma'$, insbesondere ist $x + \Gamma' = k\omega_2 + \Gamma' = \psi_2(k\omega_2 + (\Gamma' \cap \mathbb{Z})) \in \operatorname{im}(\psi_2)$. Andersherum gilt per Definition $\psi_1 \circ \psi_2 = 0$ und man erhält die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{\psi_2} \Gamma/\Gamma' \xrightarrow{\psi_1} Y_1 \longrightarrow 0.$$

Damit gilt nun $ad = |Y_1||Y_2| = (\Gamma : \Gamma') = n$. Auf Grund von $a\omega_1 \in \Gamma' + \omega_2\mathbb{Z}$ existiert ein $b \in \mathbb{Z}$, sodass $a\omega_1 + b\omega_2 \in \Gamma'$. Schließlich kann wegen $d\omega_2 \in \Gamma'$ noch $0 \leq b < d$ angenommen werden und unter dieser Bedingung ist b eindeutig. Nach Konstruktion ist damit $\{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\}$ eine Basis von Γ', denn das $\mathbb{Z}$-Erzeugnis von $\{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\}$ ist in Γ' enthalten und hat nach dem ersten Teil des Beweises ebenfalls Index n in Γ.

Zu jedem Teilgitter Γ' von Γ mit Index n erhält man auf diese Weise eine Matrix $\sigma(\Gamma') = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in S_n$. Nach obiger Konstruktion gilt sowohl $\Gamma_{\sigma(\Gamma')} = \Gamma'$ als auch $\sigma(\Gamma_\sigma) = \sigma$, folglich sind $\sigma \mapsto \Gamma_\sigma$ und $\Gamma' \mapsto \sigma(\Gamma')$ zueinander inverse Abbildungen. Das war zu zeigen. □

(1.8) Beispiel
Ist $n = p$ eine Primzahl, so sind die Elemente von S_n die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$, wobei $0 \leq b < p$. ◇

§2 Bezug zu Funktionen der oberen Halbebene

— Der Übergang: Funktionen mit Gewicht 2k —

Sei E eine Menge, $T : X_E \to X_E$ eine Korrespondenz auf E und F eine auf E definierte Abbildung. Setzt man F $\mathbb{Z}$-linear fort, so erhält man durch Vorschalten von T eine transformierte Abbildung $TF := F \circ T|_E$, die für $x \in E$ explizit durch

$$TF(x) := \sum_{y \in E} n_y(x) F(y)$$

gegeben ist (mit $n_y(x)$ wie bei Definition (1.1)).

Sei nun F eine Gitterfunktion mit Gewicht $2k$, das heißt

$$R_\lambda F = \lambda^{-2k} F$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Nach (1.4) b) gilt zudem für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$R_\lambda(T(n)F) = T(n)(R_\lambda F) = T(n)(\lambda^{-2k}F) = \lambda^{-2k} T(n)F.$$

Damit ist auch $T(n)F$ eine Funktion mit Gewicht $2k$ und aus (1.4) erhält man folgende Regeln.

(2.1) Proposition
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd und p eine Primzahl. Dann gilt für jede Funktion F mit Gewicht $2k$:

a)
$$T(m)T(n)F = T(mn)F$$

b)
$$T(p)T(p^n)F = T(p^{n+1})F + p^{1-2k}(T(p^{n-1})F).$$

— *Schwach modulare Funktionen* —

Wie bereits bekannt, gibt es zu jeder schwach modularen Funktion f mit Gewicht $2k$ genau eine Gitterfunktion F mit Gewicht $2k$, sodass für alle $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$ die Identität

$$F(\Gamma(\omega_1, \omega_2)) = \omega_2^{-2k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

gilt, wobei $\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$.

(2.2) Definition
Sei f eine schwach modulare Funktion mit Gewicht $2k$ und F die zugehörige Funktion auf $\mathscr{R}$ mit Gewicht $2k$. Definiere die Funktion $T(n)f$ als diejenige Abbildung auf der oberen Halbebene, zu der die Funktion $n^{2k-1}T(n)F$ auf $\mathscr{R}$ gehört. $\diamond$

Unter diesen Bedingungen gilt also für $z \in \mathbb{H}$

$$T(n)f(z) = n^{2k-1}T(n)F(\Gamma(z, 1)).$$

Durch den Faktor n^{2k-1} ist gewährleistet, dass in den kommenden Formeln keine echten Brüche auftauchen. Mit Lemma (1.7) erhält man $T(n)f$ für $z \in \mathbb{H}$ auch ohne Rückgriff auf F durch

$$T(n)f(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N},\, ad = n, \\ 0 \leq b < d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Hieran sieht man, dass, falls f meromorph oder sogar holomorph auf $\mathbb{H}$ sein sollte, dasselbe auch für $T(n)f$ gilt. Allgemein hat man die

(2.3) Proposition
Sei f eine schwach modulare Funktion mit Gewicht $2k$. Dann ist auch $T(n)f$ schwach modular mit Gewicht $2k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd und p eine Primzahl, so gilt:

a)
$$T(m)T(n)f = T(mn)f$$

b)
$$T(p)T(p^n)f = T(p^{n+1})f + p^{2k-1}T(p^{n-1})f.$$

Beweis
Da f meromorph auf $\mathbb{H}$ ist, gilt dies auch für $T(n)f$ und weil $n^{2k-1}T(n)F$ eine Funktion mit Gewicht $2k$ ist, handelt es sich bei $T(n)f$ um eine schwach modulare Funktion. Die beiden Rechenregeln erhält man aus (1.4) c) und d). Für die zweite Identität beachte man, dass der zusätzliche Faktor von p^{2k-1} aus Definition (2.2) hier zu tragen kommt:

$$\begin{aligned} T(p^n)T(p)f(z) &= T(p^n)\left(p^{2k-1}T(p)F(\Gamma(z,1))\right) \\ &= (p^{2k-1})^{n+1}T(p^n)T(p)F(\Gamma(z,1)) \\ &= (p^{2k-1})^{n+1}\left(T(p^{n+1})F(\Gamma(z,1)) + p^{1-2k}T(p^{n-1})F(\Gamma(z,1))\right) \\ &= T(p^{n+1})f(z) + p^{2k-1}T(p^{n-1})f(z). \end{aligned}$$

□

— Modulare Funktionen —

Sei nun f eine modulare Funktion und

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)q^m$$

die Reihenentwicklung von f bezüglich $q = e^{2\pi iz}$.

(2.4) Proposition
Die Funktion $T(n)f$ ist eine modulare Funktion, deren Reihenentwicklung bezüglich $q = e^{2\pi iz}$ durch

$$T(n)f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma(m)q^m$$

gegeben ist, wobei

$$\gamma(m) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{N} \\ a|\mathrm{ggT}(n,m)}} a^{2k-1}c\left(\frac{mn}{a^2}\right).$$

◇

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned} T(n)f(z) &= n^{2k-1} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\, ad=n, \\ 0\le b<d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \\ &= n^{2k-1} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N},\, ad=n, \\ 0\le b<d}} d^{-2k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)\exp\left(2\pi im\frac{az+b}{d}\right). \end{aligned}$$

Die Summe
$$\sum_{0 \le b < d} \exp\left(\frac{2\pi i b m}{d}\right)$$
ist entweder d, falls $d|m$ (dann summiert man über Einsen), oder 0 (man summiert über die d-ten Einheitswurzeln). Es muss also nur über die Vielfachen von d aufsummiert werden:
$$\begin{aligned} T(n)f(z) &= n^{2k-1} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N},\, ad=n, \\ \mu \in \mathbb{Z}}} d^{-2k+1} c(\mu d) q^{a\mu} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^m \sum_{\substack{a \in \mathbb{N},\, ad=n, \\ a | \mathrm{ggT}(n,m)}} (\tfrac{n}{d})^{2k-1} c(\tfrac{md}{a}) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^m \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}, \\ a | \mathrm{ggT}(n,m)}} a^{2k-1} c(\tfrac{mn}{a^2}). \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Summanden mit gleichen Potenzen von q gesammelt und $ad = n$ ausgenutzt. Da f eine modulare Funktion ist, gibt es ein $N \ge 0$, sodass $c(m) = 0$ für alle $m \le -N$. Folglich gilt $c(\frac{mn}{a^2}) = 0$ für alle $m \le -nN$. Damit ist $T(n)f$ also im Unendlichen meromorph und ohnehin schwach modular, also eine modulare Funktion. □

Es lassen sich ein paar einfache Folgerungen angeben:

(2.5) Korollar
Mit $\sigma_k(n) := \sum_{a|n} a^k$ und den Bezeichnungen aus (2.4) gilt :

a) $\gamma(0) = \sigma_{2k-1}(n)c(0)$ und $\gamma(1) = c(n)$.

b) Falls $n = p$ eine Primzahl ist, so gilt
$$\gamma(m) = \begin{cases} c(pm), & \text{falls } m \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ c(pm) + p^{2k-1} c(\frac{m}{p}), & \text{falls } m \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

c) Falls f eine Modulform oder eine Spitzenform ist, so gilt dies auch für $T(n)f$. ◇

Beweis
Die ersten beiden Aussagen erhält man durch Einsetzen in die Formel für $\gamma(m)$ aus (2.4). Für die letzte Aussage ist zu beachten, dass für eine Modulform $c(m) = 0$ für $m < 0$ und für eine Spitzenform zusätzlich $c(0) = 0$ gilt und nach a) und (2.4) überträgt sich dies auf $\gamma(m)$. □

Zusammenfassend lässt sich folgendes Resultat formulieren.

(2.6) Bemerkung
Die von den $T(n)$ erzeugte Algebra operiert auf M_k und M_k^0, den Vektorräumen der Modulformen beziehungsweise Spitzenformen, vermöge Endomorphismen, welche alle miteinander kommutieren. Zudem gelten bezüglich dieser Operation folgende Gleichungen:

a) $T(mn) = T(m)T(n)$ für alle teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$.

b) $T(p)T(p^n) = T(p^{n+1}) + p^{2k-1}T(p^{n-1})$ für $p \in \mathbb{N}$ prim. $\diamond$

§ 3 Schlussbemerkung

Es wurden die Hecke-Operatoren eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften hergeleitet.

Literatur

[1] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer, New York, 1996.