Die Gewichtsformel und die Algebra der Modulformen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 30.03.2011

Sonja Klein

Das Ziel des Vortrages ist es, eine Einführung in die Algebra der Modulform und einen Beweis der Gewichtsformel darzulegen. Mit ihrer Hilfe kann man, wenn das Gewicht einer Modulform bekannt ist, Näheres zu den Null- und Polstellen sagen. Zunächst sollen dazu einige Voraussetzungen behandelt werden. Der Vortrag basiert auf [2]:

§1 Der Raum der Modulformen

Für den späteren Beweis der Gewichtsformel wird folgender Hilfssatz benötigt:

— *Die Nullstellen und Pole einer Modulfunktion* —

(1.1) Definition (Ordnung)
Sei f meromorph auf $\mathbb{H}$ nicht identisch mit der Nullfunktion und $p \in \mathbb{H}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{f}{(z-p)^n}$ holomorph und ungleich Null in p ist. Dann definieren wir dieses n als *Ordnung* von f in p und schreiben es als $v_p(f)$ ◇

Zur Erinnerung:
Da f meromorph ist, existiert eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

um $w \in \mathbb{H}$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $a_n \neq 0$ sowie $a_n = 0$ für alle $n < r$ mit endlichem Hauptteil und einem auf einer punktierten Umgebung von w absolut und kompakt gleichmäßig konvergenten Nebenteil. Dieses r wird Ordnung der Modulform f an der Stelle w genannt und es gilt [1]:

1. w ist Nullstelle von f, falls $r > 0$ und
2. w ist Polstelle von f, falls $r < 0$.

(1.2) Lemma
Ist f meromorph auf $\mathbb{H}$, so gilt für alle $p \in \mathbb{H}$ und $g \in G$:

$$v_p(f) = v_{g(p)}(f) \qquad \diamond$$

Beweis
Nach dem Vortrag von Jonas Gallenkämper gilt

$$f(z) = (cz+d)^{-2k} \cdot f(gz) \text{ für alle g} \in G. \tag{1}$$

Sei $p \in \mathbb{H}$ beliebig und $w := gp$ mit $g \in G$. Da f eine meromorphe Funktion mit Polen bzw. Nullstellen in w der Ordnung $r \in \mathbb{Z}$ ist, lässt sie sich nach [3] 3.8 III mit Hilfe einer Funktion h, die holomorph auf einer Umgebung von w ist, ausdrücken:

$$f(z) = (z-gp)^r \cdot h(z) \text{ mit } h(gp) \neq 0 \tag{2}$$

Sei nun eine Umgebung U von p so klein gewählt, dass gU ganz in der Umgebung von w liegt. Dies ist moeglich, da $z \mapsto gz$ stetig auf $\mathbb{H}$ ist. Damit ist $h(gz)$ auch holomorph auf U. Also lässt sich in (1) $f(gz)$ durch $(gz-gp)^r h(gz)$ ersetzen und darauf folgt:

$$f(z) = (gz-gp)^r \cdot h(gz) \cdot (cz+d)^{-2k} \text{ für alle } z \in U/\{p\}$$

mit $h(gp) \neq 0$. Durch den Zusammenhang $(gz\prime - gz) = \frac{det(g)}{(cz\prime+d)(cz+d)}(z\prime - z)$, der aus [3] 2.2 VII bekannt ist und weil $g \in G$ impliziert, dass $det(g) = 1$ ist, sieht man leicht, dass

$$f(z) = (cz+d)^{-r} \cdot (cp+d)^{-r} \cdot h(gz) \cdot (cz+d)^{-2k} \cdot (z-p)^r$$

gilt.
Man nennt $i(z) := (cz+d)^{-2k-r} \cdot (cp+d)^{-r} \cdot h(gz)$. Als Komposition von Funktionen, die auf einer Umgebung von p holomorph sind ist i auch holomorph auf einer Umgebung von $z \in \mathbb{H}$ und man sieht $i(z) \neq 0$ durch Einsetzen. Weil man nun

$$f(z) = (z-p)^r \cdot i(z)$$

schreiben kann, folgt, dass $v_p(f) = r$.
Nach (2) gilt $v_{g(p)}(f) = r$ und damit

$$v_{g(p)}(f) = v_p(f) \qquad \square$$

Im Folgenden soll die Ordnung des Stabilisators im Punkt p als e_p bezeichnet werden. Wenn p kongruent zu i modulo G ist gilt $e_p = 2$. Wenn p kongruent zu ρ modulo G ist gilt $e_p = 3$. Ansonsten gilt $e_p = 1$. (vgl. Vortrag von Anna Scholz) Zudem bezeichnet $v_\infty(f)$ die Ordnung in $q = 0$ in der Funktion $\tilde{f}(q)$ (vgl. Vortrag von Jonas Gallenkämper)

(1.3) Satz (Gewichtsformel)

Sei f eine Modulfunktion des Gewichtes $2k$, welche nicht identisch mit der Nullfunktion ist. Dann gilt:

$$v_\infty(f) + \sum_{p \in \mathbb{H} \backslash G} \frac{1}{e_p} v_p(f) = \frac{k}{6} \qquad \diamond$$

Wie man leicht sieht, kann man diese Formel in folgender Form schreiben:

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\rho(f) + \sum_{p \in \mathbb{H} \backslash G}^{*} v_p(f) = \frac{k}{6}$$

Wobei das $*$ oberhalb der Summe bedeutet, dass man über alle Punkte in $\mathbb{H}/G$ addiert außer über die Äquivalenzklassen von i und p.

Zunächst sollte man zeigen, dass der Satz Sinn macht, f also nur eine endliche Menge Null- und Polstellen besitzt:

(1.4) Bemerkung

Eine Modulfunktion, welche ungleich der Nullfunktion ist, hat modulo G nur endlich viele Nullstellen und Pole in $\mathbb{H}$. Die Ordnung $v_p(f)$, $p \in \mathbb{H}$ hängt nur von der Äquivalenzklasse $\mathbb{H}/G$ ab. $\diamond$

Beweis

Da $\tilde{f}$ meromorph ist, existiert ein $r > 0$ sodass $\tilde{f}$ keine Nullstellen oder Pole für $0 < |q| < r$.

$\Rightarrow$ Innerhalb $Im(z) > e^{2\pi r}$ hat f keine Nullstellen oder Pole. Der abgeschnittene Fundamentalbereich $Im(z) \leq e^{2\pi r}$ ist abgeschlossen und beschränkt woraus die Kompaktheit folgt und kann daher nur endlich viele Nullstellen und Pole enthalten. Diese enthalten ein Repräsentantensystem modulo G.[4]

Beweis (Beweis von 1.3)

Nach dem Argumentprinzip werden wir im Folgenden $\frac{1}{2\pi i} \frac{f'(z)}{f(z)}$ über den Rand von D integrieren.

Fall 1:

Wir nehmen zunächst einmal der Einfachheit halber an, dass f keine Pole oder Nullstellen auf dem Rand des Fundamentalbereiches D hat außer möglicherweise in i,ρ und $\overline{\rho}$.

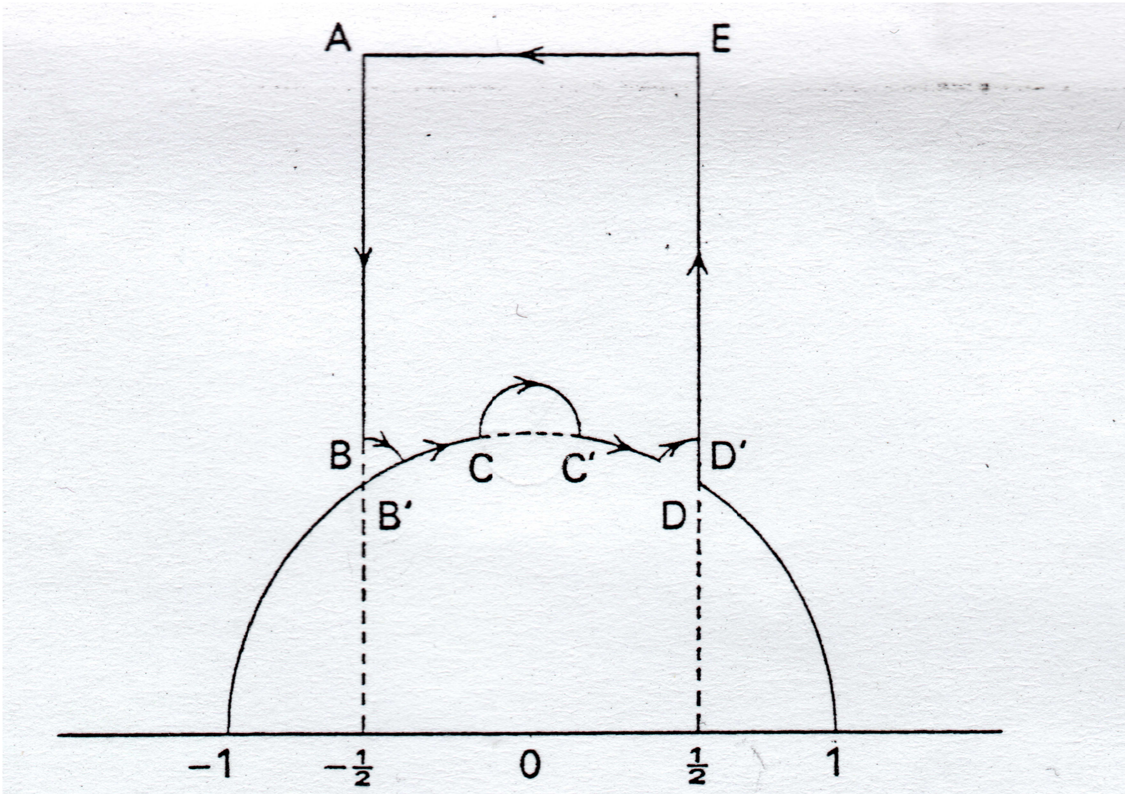

Abbildung 1: Der Weg ϱ

Somit existiert ein Weg ϱ, (vgl.Abbildung 1) dessen Inneres alle Repräsentanten der Pole oder Nullstellen von f enthält, außer die von i und ρ. Die Kreise um i,ρ und $\overline{\rho}$ haben den Radius $\epsilon > 0$. Nach dem Residuensatz gilt für ϵ entsprechend klein gewählt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\overset{\circ}{\mathbb{F}}}^{*} v_p(f) \tag{3}$$

Im Folgenden sollen also die verschiedenen Abschnitte des Integrales längs des Weges ϱ berechnet werden. Hier soll $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ gelten.

$\underline{B \to B'}$:
Das Integral $\frac{1}{2\pi i} g(z)$ über den Kreis, welcher den Kreisbogen zwischen B und B' enthält, hat in negativer Orientierung den Wert $-v_\rho(f)$. Lässt man den Radius dieses Kreises gegen 0 konvergieren so konvergiert der Winkel $\widehat{B_\rho B'}$ gegen $\frac{2\pi}{6}$. Dies soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden: Den Winkel α in Abbildung 2 kann

man bestimmen, indem man zunächst die Tangente durch den Punkt x legt. Nach Definition der Tangente ist diese senkrecht zu der Gerade von 0 nach x. Damit ist der Winkel zwischen der Tangente und der Grenze des Fundamentalbereiches gleich dem Winkel zwischen der reellen Achse und der Gerade von 0 nach x.

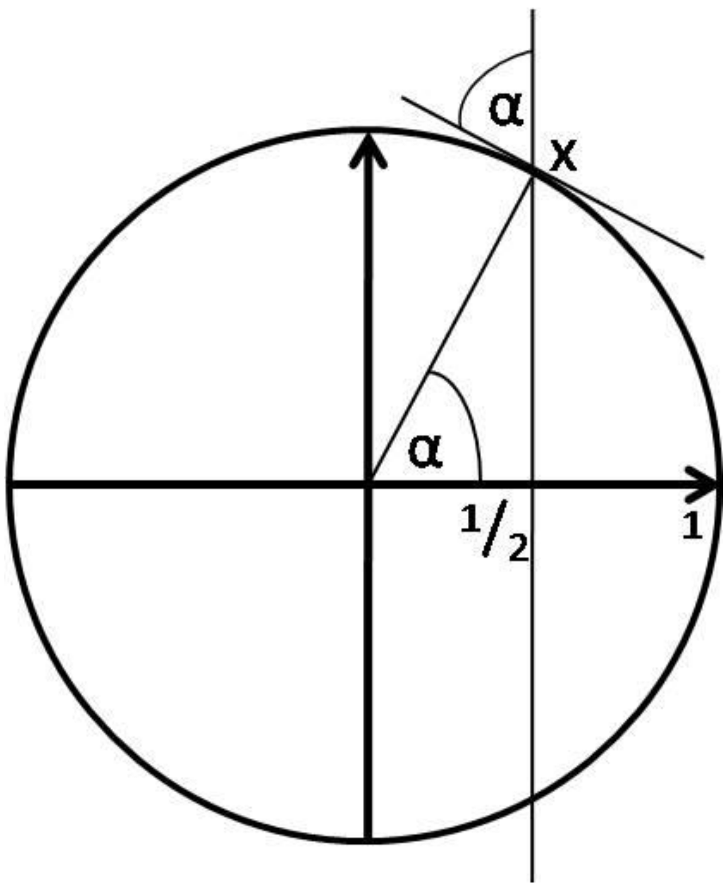

Abbildung 2: Die Berechnung des Winkels α

Diesen identischen Winkel kann man leicht berechnen:

$$\alpha = arctan(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ$$

Nun kann man das Integral bestimmen. Da $\frac{1}{2\pi i}\int_B^{B'} g(z){=}{-}v_{rho}(f)$ gilt und $60^\circ = \frac{1}{6}2\pi$ gilt, man also $\frac{1}{6}$ des Weges betrachtet folgt insgesamt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_B^{B'} g(z) \to -\frac{1}{6}v_\rho(f)$$

<u>$C \to C'$ bzw. $D \to D'$</u>:
Das Gleiche gilt für die Winkel der Kreisbögen $\widehat{C_\rho C'}$ und $\widehat{D_\rho D'}$: Wenn diese Radien gegen 0 konvergieren, konvergiert der Winkel $\widehat{C_\rho C'}$ gegen $180^\circ = \pi$ und der Winkel $\widehat{D_\rho D'}$ wieder gegen $\frac{2\pi i}{6}$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C^{C'} g(z) \to -\frac{1}{2}v_i(f)$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D^{D'} g(z) \to -\frac{1}{6}v_p(f)$$

<u>$A \to B$ bzw. $D' \to E$</u>:

Mit f ist auch f' und damit auch $g = \frac{f'}{f}$ eine periodische Funktion. Da man durch T den Weg AB in den Weg ED' überführen kann und $f(Tz) = f(z+1) = f(z)$ gilt heben sich die Integrale auf.

$A \to E$:
Zunächst soll folgender Hilfssatz bewiesen werden [4]:

(1.5) Lemma
Die Fourierentwicklung von $g = \frac{f'}{f}$ mit einer Modulform f vom Gewicht $2k$ lautet:

$$g(z) = 2\pi i v_\infty(f) + \sum_{m\geq 1} \alpha_g(m) \cdot e^{2\pi i m z} \qquad \diamond$$

Beweis
Nach [3] V 4.3 lässt sich eine Modulform f vom Gewicht $2k$ schreiben als

$$g(z) = \sum_{m\geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m z}$$

und ist absolut und lokal gleichmäßig konvergent mit $\alpha_f(m_O) \neq 0$. Nach dem Satz von Weierstraß kann diese Fourierreihe nun gliedweise differenziert werden:

$$g(z) = \sum_{m\geq m_0} \alpha_f(m) \cdot 2\pi i m \cdot e^{2\pi i m z}$$

Außerdem ist bekannt, dass die Modulform f vom Gewicht $2k$ eins-periodisch ist, also gilt $f(z) = f(z+1)$ und es folgt sofort $f'(z) = f(z+1)'$. Da $g = \frac{f'}{f}$ muss auch $g(z) = g(z+1)$ gelten. Also lässt sich g auch als Fourierreihe schreiben mit

$$g(z) = \sum_{j\geq n} \beta_g(j)^{2\pi i m z}$$

mit einem geeigneten Startwert $n \in \mathbb{Z}$ und $\beta_g(n) \neq 0$. Wir werden sehen, dass dieser sogar nur aus $\mathbb{N}_0$ gewählt werden kann. Dazu muss man den Quotienten aus den beiden Fourierreihen f und f' berechnen.

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \Leftrightarrow g(z)f(z) = f'(z)$$

Dies reduziert das Problem auf die Berechnung des Cauchy-Produktes $g(z)f(z)$ mit anschließendem Koeffizientenvergleich mit der Fourierreihe von f'. Also folgt:

$$\begin{aligned} & g(z)f(z) = f'(z) \\ \Leftrightarrow & \sum_{j\geq n} \beta_g(j)^{2\pi i m z} \cdot \sum_{m\geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m z} = \sum_{m\geq m_0} \alpha_f(m) \cdot 2\pi i m \cdot e^{2\pi i m z} \end{aligned}$$

Mit einer Indexverschiebung in beiden Reihen folgt

$$
\begin{aligned}
g(z)f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_g(j+n) * e^{2\pi i(j+n)z} * \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m+m_0)e^{2\pi i(m+m_0)z} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{k} \beta_g(t+n)e^{2\pi i(t+n)z} \alpha_f(k-t+m_0)e^{2\pi i(k-t+m_0)z}
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt folgt mit der Bildung des Cauchy Produkts. Durch Ausklammern erhält man schließlich:

$$
\begin{aligned}
g(z)f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} [\sum_{t=0}^{k} \beta_g(t+n) * \alpha_f(k-t+m_0)]e^{2\pi i(k+n+m_0)z} \\
&= \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) 2\pi i m * e^{2\pi i m z} \\
&= f'(z)
\end{aligned}
$$

Nun folgt der Koeffizientenvergleich mit der Fourierentwicklung von f'. Für den ersten Summanden $k = 0$ ergibt sich beim Vergleich der Faktor der Potenzen von e:

$$
\begin{aligned}
& e^{2\pi i z(n+k+m_0)} = e^{2\pi i m_0 z} \\
\Leftrightarrow & e^{2\pi i z(n+m_0)} = e^{2\pi i m_0 z} \\
\Leftrightarrow & n = 0
\end{aligned}
$$

Für den Koeffizienten folgt dann mit $k = 0$:

$$\begin{aligned}
&2\pi i(k+m_0) * \alpha_f(k+m_0) = \sum_{t=0}^{k} \beta_F(t)\alpha_f(k-t+m_0) \\
\Leftrightarrow &2\pi i m_0 \alpha_f(m_0) = \beta_F(0)\alpha_f(m_0) \\
\Leftrightarrow &2\pi i m_0 = \beta_F(0).
\end{aligned}$$

Diesen ($k = 0$) Summanden zieht man nun gesondert aus der Fourierentwicklung von f heraus und nun folgt (mit Anfangswert $n = 0$ und der allgemeinen Darstellung vom Fourierkoeffizient), dass:

$$\begin{aligned}
g(z) &= 2\pi i m_0 e^{2\pi i m_0 z} + \sum_{m\geq 1} \alpha_g(m)e^{2\pi i m z} \\
&= 2\pi i v_\infty(f) + \sum_{m\geq 1} \alpha_g(m)e^{2\pi i m z}
\end{aligned}$$

□

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_E^A \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_E^A \left(2\pi i v_\infty(f) + \sum_{m\geq 1} \alpha_g(m)e^{2\pi i m z}dz\right) \\
=&\frac{1}{2\pi i}\left(-2\pi i v_\infty(f) + \int_E^A \sum_{m\geq 1} \alpha_g(m)e^{2\pi i m z}dz\right) \\
=&\frac{1}{2\pi i}\left(-2\pi i v_\infty(f) + \sum_{m\geq 1} \alpha_g(m) \underbrace{\int_E^A e^{2\pi i m z}dz}_{=0 \text{ da } e^{2\pi i m z} \text{ 1 periodisch ist und } E=A+1}\right) \\
=&-v_\infty(f)
\end{aligned}$$

$B' \to C$ bzw. $D \to C'$:

Durch S kann man den Weg $B'C$ in den Weg DC' überführen. Es gilt $f(Sz) = f(-\frac{1}{z}) = ((-1)\cdot(-\frac{1}{z}))^{-2k} f(\frac{-1}{1\cdot(-\frac{1}{z})}) = z^{2k} f(z)$. Daraus folgt:

$$\frac{f(Sz)'}{f(Sz)} = \frac{(f(z)z^{2k})'}{f(z)z^{2k}} = \frac{2k\cdot z^{2k-1}f(z) + f'(z)z^{2k}}{f(z)\cdot z^{2k}} = \frac{2k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Daraus folgt für das Integral:

$$\begin{aligned}
&2\pi i \int_{B'}^{C} g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}^{D} g(z)dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{B'}^{C} (g(z) - g(Sz))dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{B'}^{C} g(z) - (\frac{2k}{z} + g(z))dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{B'}^{C} -\frac{2k}{z}dz \\
=&-\frac{2k}{2\pi i}(log(C) - log(B'))
\end{aligned}$$

Nun sind wir am Grenzübergang $\epsilon \to 0$ interessiert. Dieser lautet

$$\begin{aligned}
&-\frac{2k}{2\pi i}(log(i) - log(\rho)) \\
=&-\frac{2k}{2\pi i}(log(e^{\frac{\pi i}{2}} - log(e^{\frac{2\pi i}{3}})) \\
=&-\frac{2k}{2\pi i}(\frac{\pi i}{2} - \frac{2\pi i}{3}) \\
=&\frac{2k}{12}
\end{aligned}$$

□

Fall 2:

Nun habe f eine weitere Nullstelle oder einen Pol λ auf dem Rand von D.
Wir betrachten zunächst die Integrale der Wege von $A \to \lambda + \epsilon$ und $\lambda - \epsilon \to B$ bzw.

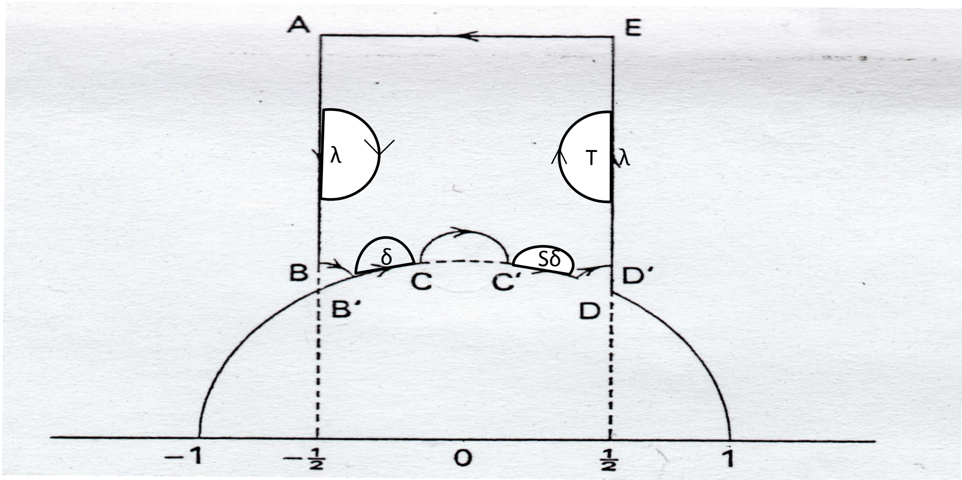

Abbildung 3: Der Weg ϱ mit zusätzlicher Nullstelle λ

von $D' \to T\lambda - \epsilon$ und $T\lambda + \epsilon \to E$, wobei ϵ als der Radius des Weges um λ und $T\lambda$ definiert ist.
Hier kann man wie im Fall zuvor $A \to \lambda + \epsilon$ bzw. $\lambda - \epsilon \to B$ in die Wege $D' \to T\lambda - \epsilon$ bzw. $T\lambda + \epsilon \to E$ überführen.
Es gilt wieder $f(Tz) = f(z+1) = f(z)$. Da mit f auch f' die Periode 1 hat, hat auch $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ die Periode 1. Somit folgt für das Integral:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{A}^{\lambda+\epsilon} g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-\epsilon}^{B} g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{T\lambda-\epsilon}^{D'} g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{E}^{T\lambda+\epsilon} g(z)dz \\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{A}^{\lambda+\epsilon} g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-\epsilon}^{B} g(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{D'}^{T\lambda-\epsilon} g(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{T\lambda+\epsilon}^{E} g(z)dz \\
=&0
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Integrale der Kreisbögen um λ und $T\lambda$. Es gilt also die folgenden Integrale zu berechnen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} g(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{T\lambda-\epsilon}^{T\lambda+\epsilon} g(z)dz$$

Anschaulich entspricht der gesamte Weg genau $-\alpha K_\epsilon(\lambda)$. Also folgt insgesamt:

$$\int_{-\alpha K_\epsilon(\lambda)} g(z)dz = -v_\lambda(f)$$

Des Weiteren kann es eine Nullstelle auf dem Weg $C' \to D$, welche im Folgenden mit γ bezeichnet wird, geben. Den Weg darum kann man durch S auf einen Weg um die Nullstelle auf $C \to B'$, welche mit $\frac{-1}{\gamma}$ bezeichnet wird, überführen.
Es gilt wie im obigen Fall:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C'}^{D} g(z)dz + \int_{C}^{B'} g(z)dz\right) = \int_{-\alpha K_\epsilon \gamma} g(z)dz - \underbrace{2k\int_{B'}^{C}\frac{1}{z}dz}_{\overset{\epsilon\to 0}{\to} 0^1}$$

Daraus folgt sofort aber mit dem Argumentprinzip:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C'}^{D} g(z)dz + \int_{C}^{B'} g(z)dz\right) \overset{\epsilon\to 0}{\to} -v_\gamma(f)$$

Diesen Fall kann man natürlich auch für mehrere Nullstellen oder Pole auf dem Rand von D übertragen.

[1]nach[3] 1.10 b) da das Maximum endlich ist

Zum Beweis der Gewichtsformel geht man von (3) aus und sammelt die unterschiedlichen Ergebnisse auf der rechten Seite:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{\overset{\circ}{\mathbb{F}}}^{*} v_p(f)$$
$$= - v_\infty(f) - \frac{1}{2}v_i(f) - \frac{1}{3}v_\rho(f) - v_\lambda(f) - v_\gamma(f) + \frac{k}{6}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{p\in\mathbb{H}\setminus G}^{*} v_p(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + v_\infty(f) = \frac{k}{6}$$

§2 Die Algebra der Modulformen

Zunächst sollen ein paar einführende Definitionen, teils wiederholt und teilt neu eingeführt werden.

(2.1) Definition
Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren den $\mathbb{C}-$ Vektorraum der Modulformen mit Gewicht $2k$ als M_k und den Unterraum der Spitzenformen vom Gewicht $2k$ als M_k^0. Damit bezeichnet M_k^0 den Kern der Linearform $f \to f(\infty)$ von M_k. Zudem sind die Eisensteinreihen G_k in M_k für $k \geq 2$, sodass $G_k(\infty) \neq 0$ gilt. $\diamond$

(2.2) Lemma
Es gilt $M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}G_k$ für $k \geq 2$. $\diamond$

Beweis
Sei $g \in \mathbb{C}G_k$ und $f \in M_k$. Dann ist $h := f - \frac{f(\infty)}{g(\infty)}g \in M_k^0$ eine Spitzenform und es gilt:

$$f = h + Cg \text{ mit } C = \frac{f(\infty)}{g(\infty)} \in \mathbb{C} \qquad \square$$

Da G_k Dimension 1 hat folgt sofort $dim M_k \leq 1 + dim M_k^0$ und somit $dim M_k/M_k^0 \leq 1$. [1]

Zur Wiederholung: Es existiert eine Modulform $\Delta \neq 0$ vom Gewicht 12. Sie besitzt in der oberen Halbebene keine Nullstellen, in ∞ jedoch eine Nullstelle (erster Ordnung) (Dies wird im Folgenden noch gezeigt). Δ ist also eine Spitzenform. Dieses Δ ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Eine Darstellung ist: $\Delta = (60G_2)^3 - 27(140G_3)^2$

(2.3) Satz

a) Es gilt $M_k = \{0\}$ für $k = 1$ oder $k \leq 0$.

b) Für $k = 0, 2, 3, 4, 5$ ist M_k ein Vektorraum der Dimension 1 mit Basis $1, G_2, G_3, G_4, G_5$. Es gilt $M_k^0 = \{0\}$.

c) Eine Multiplikation mit Δ definiert einen Isomorphismus von M_{k-6} in M_k^0, d.h. $M_k^0 = \Delta M_{k-6}$ ◇

Beweis

a) Sei $f \neq 0 \in M_k$. Alle Terme der linken Seite der Gewichtsformel

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_{rho}(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}\backslash G}^{*} \frac{1}{e_p}v_p(f) = \frac{k}{6}$$

sind ≥ 0. Also haben wir $k \geq 0$ und $k \neq 1$ da $\frac{1}{6}$ nicht in der Form $n + \frac{1}{2}n' + \frac{1}{3}n''$ geschrieben werden kann wenn $n, n', n'' \geq 0$.

c)Nun betrachten wir die Gewichtsformel für $f = G_2$. Man kann $\frac{2}{6}$ in der Form $n + \frac{1}{2}n' + \frac{1}{3}n''$ für $n, n', n'' \geq 0$ nur schreiben wenn $n = 0, n' = 0, n'' = 1$. Daraus folgt, dass $v_p(G_2) = 0$ für $p \neq \rho$.
Das gleiche Argument kann man bei G_3 anwenden und zeigt, dass $v_\rho(G_3) = 1$ und alle anderen $v_p(G_3) = 0$.
Das gleiche Argument wurde benutzt um die Nullstellen von Δ zu finden: Da Δ das Gewicht 12 hat und $v_\infty(\Delta) \geq 1$ gilt, muss $v_p(\Delta) = 0 \forall p \neq \infty$ gelten und kann somit keine weiteren Nullstelle besitzen.
Sei nun $f \in M_k^0$. Wir setzen $g = \frac{f}{\Delta}$. Daraus folgt(nach dem Vortrag von Jonas Gallenkämper), dass g das Gewicht $2k - 12$ hat. Daraus folgt für die Ordnung:

$$v_p(g) = v_p(f) - v_p(\Delta) = \begin{cases} v_p(f) & \text{falls p} \neq \infty \\ v_p(f) - 1 & \text{falls p} = \infty \end{cases}$$

Da f in M_k^0 ist also die Ordnung für alle p größer oder gleich 0 sodass $g \in M_{k-6}$

b)Diese Aussage soll nun mit Hilfe von a) und c) bewiesen werden.

Sei $k \leq 5$. Dann ist $k - 6 \leq 0$ sodass $M_{k-6} = 0$ nach a) gilt. Daraus folgt mit c), dass auch für $M_k^0 = 0$ gilt. Nun ist also die Dimension $dim M_k \leq 1$. Da $1, G_2, G_3, G_4, G_5$ Elemente von M_0, M_2, M_3, M_4, M_5 sind muss die Dimension von M_k für $k = 0, 2, 3, 4, 5$ also gleich 1 sein. □

(2.4) Korollar
Es gilt

$$dimM_k = \begin{cases} [\frac{k}{6}] & \text{falls } k \equiv 1(\text{mod } 6), k \geq 0 \\ [\frac{k}{6}] + 1 & \text{falls } k \not\equiv 1(\text{mod } 6), k \geq 0 \end{cases}$$

wobei $[x]$ als Gauß-Klammer zu lesen ist. ◇

Beweis
Nach a) und und b) gilt die Formel für $0 \leq k \leq 5$. Sei nun $k \geq 6$. Nach Lemma (2.2) gilt: $dimM_k = 1 + dimM_k^0 \; \forall \; k \geq 2$. Nach c) gilt aber auch $dimM_k^0 = dimM_{k-6} \forall k \geq 6$. Daraus folgt insgesamt: $dimM_k = 1 + dimM_{k-6}$. Durch Induktion folgt die Behauptung. □

(2.5) Korollar
Die Menge $X_k = \{G_2^\alpha G_3^\beta | \alpha, \beta \geq 0, 2\alpha + 3\beta = k\}$ bilden eine $\mathbb{C}$-Basis des Vektorraumes M_k. ◇

Beweis
Wie zeigen zunächst durch eine Induktion nach k, dass X_k ein $\mathbb{C}$ Erzeugendensystem bildet. Als Induktionsanfang folgt die Aussage direkt aus Satz (2.3) a) und b) für $k \leq 3$. Man wähle nun α und β so, dass $2\alpha + 3\beta = k$. Dies ist möglich für alle $k \geq 2$:
Falls k gerade ist, besitzt k die Darstellung $k = 2\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$. Sämtliche ungeraden Zahlen sind von der Form $k + 1$ mit k gerade. Da jedes solche k darstellbar war als $k = 2\beta$, erhält man für jedes der $k + 1$ eine Darstellung $k + 1 = 2(\alpha - 1) + 3$.
Die Modulform $g = G_2^\alpha G_3^\beta$ ist in ∞ ungleich 0. Wenn $f \in M_k$, gibt es nach Lemma (2.2) ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $f - \lambda g$ eine Spitzenform ist, die sich nach c) schreiben lässt als Δh mit $h \in M_{k-6}$, wobei h ein kleineres Gewicht hat:

Wir können aber durch Induktionsvoraussetzung darauf schließen, dass h eine Linearkombination aus $G_2^\alpha G_3^\beta = k - 12 = 2\alpha + 3\beta$. Wie erinnern uns, dass auch Δ eine Kombination aus G_2 und G_3 war. Daraus folgt, dass sich jedes $f \in M_k$ als Linearkombination von X_k schreiben lässt. Daraus folgt die Behauptung.
Nun bleibt zu zeigen, dass das Erzeugendensystem $< X_k >$ auch eine Basis von M_k darstellt, das heißt, dass die Monome linear unabhängig sind. Dies kann man jedoch durch eine Induktion über das Gewicht k leicht zeigen:
Für $k \in 1, .., 5$ ist die Aussage nach Satz 2.3 b) sofort klar. Sei also nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest und die Aussage gelte für dieses k.
$k \rightarrow k + 1$: Man bilde also nun eine Linearkombination aus G_2^α und G_3^β mit

$2\alpha + 3\beta = k + 1$ und setze sie gleich 0. Diese betrachte man im Punkt i. Hier erkennt man sofort, dass die Linearkombination keine Monome ohne G_3 enthalten kann, da hier G_2 ungleich 0 ist. Man kann also durch G_3 dividieren, da es sich wegkürzt. Nun betrachtet man aber eine Modulform geringerer Ordnung, für die die Unabhängigkeit schon bewiesen war. Daraus folgt die Behauptung.

Nun noch eine abschließende Bemerkung: Sei $M = \bigoplus_0^\infty M_k$ eine Algebra, welche die direkte Summe der M_k darstellt und sei $\epsilon : \mathbb{C}[X, Y] \to M$ der Homomorphismus welcher X auf G_2 und Y auf G_3 abbildet. Die Aussage in Korollar (2.5) ist dann äquivalent dazu, dass ϵ ein Isomorphismus ist. Man kann also M als die Algebra $\mathbb{C}[G_2, G_3]$ definieren. $\square$

Literatur

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Aufl. Berlin 2007.

[2] J.P. Serre, A Course in Arithmetic (Graduate Texts in Mathmatics), 5. Aufl. Berlin 1996.

[3] A. Krieg, Funktionentheorie I. Skript zur Vorlesung, Aachen 2008.

[4] E. Freitag, R.Busam, Funktionentheorie 1, 4. Aufl. Berlin 2006.