j-Funktion und Fourierentwicklung

Ausarbeitung zum Seminar zur Funktionentheorie, 31.03.2011

Stefan Bennink

Dieses Seminar wird die *j-Funktion* einführen und darüber hinaus Eisensteinreihen als spezielle Fourierreihen untersuchen.

§1 j-Funktion

(1.1) Definition (j-Funktion/absolute Invariante (modular invariant))
Die *j-Funktion/absolute Invariante* wird definiert als

$$j := 1728\frac{g_2^3}{\Delta} = 12^3\left(\frac{g_2^3}{\Delta}\right).$$

(1.2) Lemma

a) Die j-Funktion ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.

b) Sie ist holomorph auf $\mathbb{H}$ und hat einen einfachen Pol in ∞.

c) Sie definiert eine Bijektion von $\mathbb{H}/G$ auf $\mathbb{C}$.

Beweis

a) Die j-Funktion ist ein Quotient zweier Modulfunktionen vom Gewicht 12. Das heißt, für eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$j(z) = 1728\frac{(cz+d)^{-12}\left(g_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)^3}{(cz+d)^{-12}\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = 1728\frac{\left(g_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)^3}{\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}.$$

Damit folgt die Behauptung.

b) Sowohl g_2^3 als auch Δ sind holomorph auf $\mathbb{H}$ und Δ ist auf $\mathbb{H}$ nullstellenfrei. Δ hat aber eine einfache Nullstelle in ∞. Damit gilt die Behauptung.

c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es ist nun zu zeigen, dass $j = \lambda$ für genau ein $z \in \mathbb{H}/G$ gilt. Definiere dazu $f_\lambda = 1728 g_2^3 - \lambda\Delta$. Es reicht also nun zu zeigen, dass f auf $\mathbb{H}$ genau eine Nullstelle modulo G hat.
Wende dazu die Gewichtsformel an mit $f = f_\lambda$ und $k = \frac{12}{2} = 6$.

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_{p\in H/G}^{*} \nu_p(f) = \frac{k}{6}.$$

Da $\frac{k}{6} = 1$ ist, kann höchstens $\sum_{p\in H/G}^{*} \nu_p(f) = 1$ gelten, um die Gleichung zu erfüllen. Da Ordnungen von Nullstellen ganzzahlig sind, kann also in diesem Falle höchstens ein Punkt in $\mathbb{H}/G$ ohne $\{i, \rho\}$ existieren, der Nullstelle von f ist. Ist $\sum_{p\in \mathbb{H}/G}^{*} \nu_p(f) = 0$, so ist die Gleichung $n + \frac{n'}{2} + \frac{n''}{3} = 1$ für ganzzahlige n, n', n'' nur erfüllbar für
$(n, n', n'') \in \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$.
Also kann nur eine Nullstelle von f in $\mathbb{H}/G$ existieren mit positiver Ordnung. Dies ist die Behauptung.

□

(1.3) Lemma
Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. Dann sind äquivalent:

i) f ist eine modulare Funktion vom Gewicht 0.

ii) f ist ein Quotient zweier Modulformen von gleichem Gewicht.

iii) f ist eine rationale Funktion in j.

Beweis
Die Folgerung (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) ergibt sich sofort aus Lemma (1.2), wobei sich die Holomorphie der Zähler- bzw. Nennerfunktion von (iii) $\Rightarrow$ (ii) durch Erweitern mit Δ^m ergibt, wobei m das Maximum der Grade von Zähler- und Nennerfunktion ist.

Es bleibt also die Richtung (i) $\Rightarrow$ (iii) zu zeigen. Die Behauptung ergibt sich dann per Ringschluss.
Sei f also eine modulare Funktion vom Gewicht 0. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit f mit einem Polynom in j multiplizieren, so dass das Produkt holomorph auf $\mathbb{H}$ ist. Sei f also o.E. eine modulare holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ vom Gewicht 0.
Da $\Delta(\infty) = 0$ gilt, muss ein $n \in \mathbb{N}$ existieren, so dass
$g = \Delta^n f$ holomorph in ∞ ist. g ist dann eine Modulform vom Gewicht $12n$, da sich die Gewichte beim multiplizieren modularer Funktionen addieren. Nach Korollar 2, Seite 89, A.C. in Arithmetic lässt sich g dann schreiben als Linearkombination von $G_2^\alpha G_3^\beta$ mit $2\alpha + 3\beta = 6n$. Aufgrund der Linearität können wir uns auf den Fall $G_2^\alpha G_3^\beta$ beschränken und damit

$$f = \frac{G_2^\alpha G_3^\beta}{\Delta^n}.$$

Weiter gilt aber $2\alpha + 3\beta = 6n$.
Setze nun $p = \frac{\alpha}{3}$ und $q = \frac{\beta}{2}$. p und q müssen ganzzahlig sein und außerdem gilt dann

$$f = \frac{G_2^{3p} G_3^{2q}}{\Delta^{p+q}}.$$

$\frac{G_2^3}{\Delta}$ ist eine rationale Funktion in j, da $G_2^3 = \frac{g_2^3}{60^3}$.
$\frac{G_3^2}{\Delta}$ ist eine rationale Funktion in j, da 1 eine rationale Funktion in j ist und zudem gilt

$$1 = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{g_2^3 - 27 g_3^2}{\Delta}$$

und außerdem $G_3 = \frac{g_3}{140}$. Damit ist auch f eine rationale Funktion in j. □

Da j einen Pol in ∞ hat und eine Bijektion von $\mathbb{H}/G$ nach $\mathbb{C}$ bildet, lässt sich j als eine bijektiven Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$ nach $\widehat{\mathbb{H}/G}$ auffassen.

§ 2 Bernoulli-Zahlen

(2.1) Definition (Bernoulli-Zahlen)
Die *Bernoulli-Zahlen*[1] werden definiert über die Formel

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} B_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(2.2) Erinnerung (Zetafunktion)
Die *Riemannsche Zetafunktion* wurde in der Funktionentheorie 1
definiert über

$$\zeta : \{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}, s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Den Zusammenhang zwischen Bernoulli-Zahlen und der Zeta-Funktion veranschaulicht das
(2.3) Lemma
Sei $k \geq 1$. Dann gilt

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

Zum Beweis:
Zum Beweis des Lemmas werden zunächst einige Sätze aus der Funktionentheorie gebraucht.
(2.4) Satz (Produktentwicklung des Sinus)
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2}).$$

Beweis
Siehe Funktionentheorie I, Aloys Krieg. Satz VIII 2.18 Seite 167. □

(2.5) Korollar
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_k : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f_k \not\equiv 0$, so dass das Produkt $f = \prod_{k=1}^{\infty} f_k$ auf G absolut lokal gleichmäßig konvergiert. Dann gilt

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'}{f_k},$$

wobei die Reihe auf G lokal gleichmäßig konvergiert.

[1] In der Funktionentheorie 1 wurde der Begriff anders eingeführt. Die hier eingeführte Definition liefert später kürzere und einfachere Formeln für die Zetafunktion.

Beweis
Siehe Funktionentheorie I, Aloys Krieg, Satz VIII 2.12 Seite 163. □

Der Beweis von Lemma (2.3) läuft nun auf einen Vergleich zweier Formeln für den Cotangens hinaus, die ich nun herleiten möchte.

(2.6) Lemma

$$z\cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}.$$

Beweis
Nach Definition der B_k gilt mit $x = 2iz$:

$$\begin{aligned}\frac{2iz}{e^{2iz}-1} &= 1 - \frac{2iz}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_k\frac{(2iz)^{2k}}{(2k)!}\\ &= 1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}i^{2k}\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}B_k\\ &= 1 - iz - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}B_k,\end{aligned}$$

denn es ist $(-1)^{k+1} = \begin{cases} -1, & \text{falls k gerade}\\ 1, & \text{falls k ungerade}\end{cases}$

und $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k = \begin{cases} 1, & \text{falls k gerade}\\ -1, & \text{falls k ungerade}\end{cases}$.

Daher ist $(-1)^{k+1}i^{2k} = -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Es ist also $1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}B_k = \frac{2iz}{e^{2iz}-1} + iz$.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}z\cot(z) &= z\frac{\cos(z)}{\sin(z)}\\ &= z\frac{\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})}{\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})}\\ &= iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.\end{aligned}$$

Es bleibt folgende Gleichheit zu zeigen:

$$iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = \frac{2iz}{e^{2iz}-1} + iz.$$

Da auf beiden Seiten die Grenzwerte für $z \to 0$ gleich sind, darf also durch iz geteilt werden. Also:

$$\begin{aligned}
& iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = \frac{2iz}{e^{2iz}-1} + iz \\
\Leftrightarrow\ & \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = \frac{2}{e^{2iz}-1} + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\left(\frac{e^{iz}}{e^{iz}}\right) = \frac{2+e^{2iz}-1}{e^{2iz}-1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}.
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma (2.6) bewiesen. □

Weiterhin gilt für den Cotangens das

(2.7) Lemma

$$z\cot(z) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}.$$

Beweis
Zunächst gilt mit Satz (2.4) (Produktentwicklung des Sinus):

$$f(z) := \sin(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}).$$

Daraus folgt $f'(z) = \cos(z)$.
Definiere nun

$$f_n(z) := \begin{cases} z, & \text{falls } n = 1 \\ 1-\frac{z^2}{(n-1)^2\pi^2}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}.$$

Dann gilt

$$f_n'(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ -2\frac{z}{(n-1)^2\pi^2}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

und

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Damit ist also nun:

$$\begin{aligned} z\cot(z) &= z\frac{\cos(z)}{\sin(z)} = z\frac{f'(z)}{f(z)} \overset{\text{Korollar}}{\underset{2.5}{=}} z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = z\left(\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\right) \\ &= 1 + z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2z}{(n-1)^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{z^2}{(n-1)^2\pi^2}} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} 1 + z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2z}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}} \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}} \overset{\text{geometrische}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2(k+1)}}{n^{2(k+1)}\pi^{2(k+1)}} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{verschiebung}}{=}} 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}. \end{aligned}$$

□

Die wichtigen Identitäten des Cotangens wurden damit bewiesen, so dass wir nun (2.3) beweisen können. Dazu:

Beweis

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!} &= z\cot(z) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \\ \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \\ \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}z^{2k} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}\pi^{2k}}z^{2k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Umordnung}}{\Leftrightarrow} && \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}\pi^{2k}} \\
&\underset{\text{vergleich}}{\overset{\text{Koeffizienten-}}{\Leftrightarrow}} && B_k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}\pi^{2k}} \\
&\Leftrightarrow && \zeta(2k) = B_k \pi^{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

Die Summation darf hier vertauscht werden, da die Reihe laut Analysis I absolut konvergent ist. □

§3 Reihenentwicklungen der Funktionen G_k

Wir wollen nun die Fourierentwicklung für Eisensteinreihen G_k herleiten mit $q = e^{2\pi iz}$.

Zunächst gilt mit Funktionentheorie I, Aloys Krieg, VIII. Beispiel 1.12 Seite 155 folgende Identität:

$$
\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{(z+m)(z-m)} \underset{\text{zerlegung}}{\overset{\text{Partialbruch}}{=}} \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right).
$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} &= \pi i \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} \\
&= \pi i \left(\frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} \right) \frac{e^{\pi iz}}{e^{\pi iz}} \\
&= \pi i \frac{q+1}{q-1} \\
&= \pi i \left(-\frac{q+1}{1-q} \right) \\
&= \pi i \left(\frac{-1-q}{1-q} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi i \left(\frac{1-q}{1-q} - \frac{2}{1-q} \right) \\
&= \pi i \left(1 - \frac{2}{1-q} \right) \\
&= \pi i - \frac{2\pi i}{1-q} \\
&\overset{\text{geometrische}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n .
\end{aligned}
$$

Die geometrische Reihe darf hier angewandt werden, weil $|q| = |e^{2\pi i z}| < 1$ gilt für $z \in \mathbb{H}$.
Vergleicht man die Formeln, so ergibt sich

$$
\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n .
$$

Es folgt für $k \geq 2$ die

(3.1) Bemerkung

$$
\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} (-2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n
$$

Beweis
Vollständige Induktion nach k:
Sei zunächst $k = 2$. Dann gilt nach eben Gezeigtem:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \\
\overset{\frac{d}{dz}}{\Rightarrow} & -\frac{1}{z^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+m)^2} + \frac{1}{(z-m)^2} \right) = 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n \\
\Leftrightarrow & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n \\
\Leftrightarrow & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^2} = (-2\pi i)^2 \frac{1}{(2-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-1} q^n .
\end{aligned}
$$

Für $k = 2$ ist die Aussage also wahr. Gelte die Aussage also nun für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^k} = \frac{1}{(k-1)!}(-2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n \\
\overset{\frac{d}{dz}}{\Rightarrow}\; &-k \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^{k+1}} = \frac{1}{(k-1)!}(-2\pi i)^k 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n \\
\Leftrightarrow\; &\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+z)^{k+1}} = \frac{1}{k!}(-2\pi i)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n.
\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. □

Sei nun $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ die Summe der k-ten Potenzen der positiven Teiler von n. Dann haben wir folgende Gleichheit für Eisensteinreihen:

(3.2) Lemma
Sei $k \geq 2$. Dann gilt

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

Beweis
Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
&2\zeta(2k) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2k}}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} \\
&= 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2k}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}}\right) \\
&= 2\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(0z+m)^{2k}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}}\right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(0z+m)^{2k}}\right) + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}}
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(0z+m)^{2k}}\right)}_{m\neq 0\wedge n=0} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(nz+m)^{2k}}\right)}_{m\neq 0\wedge n\neq 0} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(nz+0)^{2k}}\right)}_{m=0\wedge n\neq 0}$$

$$= \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(nz+m)^{2k}}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}}. \end{aligned}$$

Wendet man darauf nun Bemerkung (3.1) an, wobei man z durch nz ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)!}(-2\pi i)^{2k} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} q^{mn} \right) \\ &= 2\zeta(2k) + 2\frac{1}{(2k-1)!}(-2\pi i)^{2k} \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{\infty} a^{2k-1} q^{ad} \\ &= 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n. \end{aligned}$$

□

Eine andere Darstellungsform für die Eisensteinreihen liefert das

(3.3) Korollar

$$G_k = 2\zeta(2k)E_k(z),$$

wobei $E_k(z) = 1 + \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$ und $\gamma_k = (-1)^k \frac{4k}{B_k}$.

Beweis
Zunächst einmal gilt für γ_k:

$$\begin{aligned}\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\frac{1}{\zeta(2k)} &\overset{(2.3)}{=} \frac{(2\pi)^{2k} i^{2k}}{(2k-1)!}\frac{(2k)!}{2^{2k-1}B_k\pi^{2k}} \\ &= (-1)^k\frac{4k}{B_k} \\ &= \gamma_k.\end{aligned}$$

Demnach gilt dann

$$\begin{aligned}2\zeta(2k)E_k(z) &= 2\zeta(2k)(1+\gamma_k\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n) \\ &= 2\zeta(2k) + 2\zeta(2k)\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\frac{1}{\zeta(2k)}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n \\ &= 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n \\ &\overset{(3.2)}{=} G_k(z).\end{aligned}$$

□

Für die E_k gelten die Identitäten

$$\begin{aligned}E_2^2 &= E_4 \\ E_2E_3 &= E_5\end{aligned}$$

Da sich jede ganze Zahl $z > 2$ als $z = 2m + 3n$ darstellen lässt mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n = 1$ oder $n = 0$, kann man allgemein jedes E_k als Polynom in E_2 und E_3 darstellen.

§4 Koeffizienten von Modulformen

Es wird nun darum gehen, Größenschätzungen für die Koeffizienten von bestimmten Modulformen zu machen, insbesondere von Eisensteinreihen und Spitzenformen.

Sei dazu zunächst $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \qquad (q = e^{2\pi i z})$
eine Modulform vom Gewicht $2k$, $k \geq 2$.

(4.1) Lemma
Ist $f = G_k$ für ein festes k, so existieren zwei Konstanten $A, B > 0$, so dass

$$An^{2k-1} \leq |a_n| \leq Bn^{2k-1}$$

wobei A und B konstant in n sind.
Man sagt, a_n ist in der Größenordnung von n^{2k-1}.

Beweis
Nach Lemma 3.2 gilt

$$f(z) = G_k(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$$

Dann ist für $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sigma_{2k-1}(n) \\ &= \underbrace{\frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!}}_{=:A}(-1)^k\sigma_{2k-1}(n) \end{aligned}$$

Da k fest ist, und A nicht von n abhängt, ist A also konstant.
Weiter gilt

$$a_n = A(-1)^k\sigma_{2k-1}(n) \Rightarrow |a_n| = A\sigma_{2k-1}(n)$$

Nun gilt aber

$$n|n \Rightarrow \sigma_{2k-1}(n) = d_0^{2k-1} + d_1^{2k-1} + \ldots + n^{2k-1} > n^{2k-1} \qquad ,\text{da } d_i > 0.$$

Damit folgt nun

$$|a_n| = A\sigma_{2k-1}(n) > An^{2k-1},$$

womit die erste Ungleichung bewiesen wäre.

Für den Beweis der zweiten Ungleichung lässt sich zunächst Folgendes feststellen: Seien $d_0 < d_1 < \ldots < d_k$ die Teiler einer natürlichen Zahl n.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d_i d_{k-i} = n \qquad \forall i \in \{0..k\} \\ &\Leftrightarrow \frac{d_i}{n} = \frac{1}{d_{k-i}} \qquad \forall i \in \{0..k\}. \end{aligned}$$

Mit dieser Feststellung und der Betragsformel für a_n der ersten Ungleichung lässt sich nun folgern:

$$\frac{|a_n|}{n^{2k-1}} = \frac{A\sigma_{2k-1}(n)}{n^{2k-1}} = A\sum_{d|n}\frac{d^{2k-1}}{n^{2k-1}} = A\sum_{d|n}\left(\frac{d}{n}\right)^{2k-1} \underset{\text{(endliche Summe)}}{\overset{\text{Umordnung}}{=}} A\sum_{d|n}\left(\frac{1}{d}\right)^{2k-1}$$

Daraus lässt sich nun die Ungleichung unmittelbar folgern durch

$$\frac{|a_n|}{n^{2k-1}} = A\sum_{d|n}\left(\frac{1}{d}\right)^{2k-1} \leq A\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^{2k-1}} = A\zeta(2k-1) < +\infty$$
$$\Leftrightarrow |a_n| \leq \underbrace{A\zeta(2k-1)}_{=:B} n^{2k-1} = Bn^{2k-1}$$

Dies ist die zweite Ungleichung. □

Für die nächste Aussage über das Wachstum der Koeffizienten bestimmter Modulformen, wird zunächst eine Definition gebraucht:

(4.2) Definition (Landau-Symbole/$\mathcal{O}$-Notation)
Sei f eine wohldefinierte Funktion oder eine Folge, die in einen metrischen Raum abbildet. Definiere dann für x $\to \infty$
$\mathcal{O}$(f) = $\{g \mid \exists c > 0, \exists x_0 : \forall x > x_0$ gilt: $|f(x)| \leq c|g(x)|\}$
für x$\to$ a
$\mathcal{O}$(f) = $\{g \mid \exists c > 0, \exists \epsilon > 0 : \forall x \in \{x : |x-a| < \epsilon\}$ gilt: $|f(x)| \leq c|g(x)|\}$
Mathematisch lässt sich die $\mathcal{O}$-Notation wie folgt darstellen
$f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \limsup_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| < \infty;$

(4.3) Beispiel
$n \in \mathcal{O}(n^2)$
$n^3 + n^2 + 100n \in \mathcal{O}(n^4)$
$n \in \mathcal{O}(n^{100})$
$n^{1000} \in \mathcal{O}(2^n)$
$log(n) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$

Anmerkung: In der Mathematik wird häufig anstelle von $f \in \mathcal{O}(g)$ geschrieben, dass $f = \mathcal{O}(g)$.
Beide Schreibweisen sind äquivalent.

Es folgt ein zentrales Ergebnis dieses Seminars:

(4.4) Satz (Hecke-Theorem)
Sei f eine Modulform, wie sie zu Beginn dieses Paragraphen definiert wurde. Ist f nun eine Spitzenform vom Gewicht $2k$, so gilt für die Koeffizienten der Reihe

$$a_n \in O(n^k).$$

Beweis
Zunächst wissen wir, dass $a_0 = 0$ für den ersten Koeffizienten von f gilt, da f eine Spitzenform ist. Wir können also q aus der Entwicklung von f ausklammern.
Damit ist $f(z) = q \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1}$
Für $q \to 0$ läuft nun q^{n-1} schneller gegen 0 als q. Daher gilt

$$|f(z)| \in O(q) \in O(e^{-2\pi y}) \qquad \text{mit } y = \mathrm{Im}(z).$$

Definiere nun $\Phi(z) = |f(z)|y^k$.
Zunächst sei festzustellen, dass Φ invariant unter der Operation der Modulgruppe ist. Um dies zu beweisen, sei

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

mit $ad - bc = 1$.
Für $z = x + iy$ ist dann $gz = \frac{az+b}{cz+d}$.
Mit der 3. Binomischen Formel erhält man dann

$$\mathrm{Im}(gz) = \frac{y(ad-bc)}{c^2x^2 + 2cxd + d^2 + c^2y^2} = \frac{y(ad-bc)}{|(cz+d)^2|}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\Phi(gz) = \Phi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= |f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)| \left(\frac{y(ad-bc)}{|(cz+d)^2|}\right)^k \\
&\underset{Modulform}{\overset{f ist}{=}} |f(z)||(cz+d)^{2k}| \frac{y^k}{(|(cz+d)^2|)^k} \\
&= |f(z)|(|(cz+d)^2|)^k \frac{y^k}{(|(cz+d)^2|)^k} \\
&= |f(z)|y^k \\
&= \Phi(z).
\end{aligned}$$

Nun ist $\Phi(z)$ stetig auf dem Fundamentalbereich D als Multiplikation stetiger Funktionen, denn f ist eine Spitzenform, also holomorph und damit stetig. Darüberhinaus zeigt die Formel $|f(z)| \in \mathcal{O}(q) \in \mathcal{O}(e^{-2\pi y})$, dass für q nahe Null gilt, dass $\Phi(z) = |f(z)|y^k \leq e^{-2\pi y}y^k$ und damit $\Phi(z) \to 0$ für $y \to \infty$.
Insbesondere existiert damit eine Konstante $M > 0$ mit

$$|f(z)| \leq My^{-k}, \qquad z \in \mathbb{H}.$$

Sei y nun fest. Dann gilt nach Funktionentheorie I, Aloys Krieg, V. Satz 4.3 Seite 108 (Satz von der Fourierentwicklung) und Dreiecksungleichung für Integrale für die Koeffizienten a_n von f, dass

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |\int\limits_{[0,1]} f(z)e^{-2\pi inz}dz| = |\int\limits_{[0,1]} f(z)q^{-n}dz| \leq \int\limits_{[0,1]} |f(z)q^{-n}|dz \\
&= \int\limits_{[0,1]} |f(z)||e^{-2\pi in(x+iy)}|dz \underset{\text{konstant}}{\overset{\text{da y}}{\leq}} My^{-k} \int\limits_{[0,1]} |e^{-2\pi inx+2\pi ny}|dz \\
&= My^{-k} \int\limits_{[0,1]} |e^{-2\pi inx}e^{2\pi ny}|dz = My^{-k} \int\limits_{[0,1]} e^{2\pi ny}dz \\
&= My^{-k}e^{2\pi ny} \int\limits_{[0,1]} 1dz = My^{-k}e^{2\pi ny}
\end{aligned}$$

□

Also gilt $|a_n| \leq My^{-k}e^{2\pi ny}$
Für jedes feste $y > 0$ ist diese Ungleichung richtig. Setze also $y = \frac{1}{n}$. Dann ist $|a_n| \leq e^{2\pi}Mn^k$.

(4.5) Korollar
Ist f keine Spitzenform so hat a_n die Größenordnung n^{2k-1}.

Beweis
f lässt sich als Summe $\lambda G_k + h$ darstellen mit $\lambda \neq 0$ und h eine Spitzenform. Dann haben die Koeffizienten von f nach Hecketheorem und Lemma (3.1) die Größenordnung $\lambda n^{2k-1} + n^k$. Im Limes wird n^k vernachlässigbar gegenüber n^{2k-1}. Daraus folgt die Behauptung. □

Wie in A. Selberg, Proc. Symp. Pure Maths VIII, American Math Society., 1965 nachzulesen ist, lässt sich das Wachstum der a_n noch schärfer abschätzen, nämlich

durch
$a_n \in \mathcal{O}(n^{k-\frac{1}{4}+\epsilon})$ für jedes $\epsilon > 0$.
Wie noch nicht bewiesen, aber vermutet wird, lässt sich $\frac{1}{4}$ sogar noch zu $\frac{1}{2}$ verbessern.