Thetareihen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 31.03.2011

Michael Amend

Neben den in anderen Vorträgen bereits kennen gelernten Eisensteinreihen und deren Eigenschaften werden wir hier nun näher auf Thetareihen und deren Verhalten eingehen. Dazu wird im ersten Abschnitt die Konvergenz der Thetareihen behandelt, wobei festgestellt wird, dass normale Konvergenz vorliegt.
Im folgendem Teil wird die Jacobi'sche Thetatransformationsformel (C.G.J.Jacobi, 1828) bewiesen und wir zeigen einige weitere Identitäten für Thetareihen. Und zuletzt stellen wir einen Zusammenhang zu der von Eisensteinreihen bekannten Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ her.
Im letzten Abschnitt zeigen wir noch einen Zusammenhang zwischen den aus der Linearen Algebra bekannten Quadratischen Formen und den Thetareihen, indem wir sehen werden, dass man einen bestimmten Typ von Thetareihen quadratischen Formen zuordnen kann.
Doch zunächst zur Konvergenz der Thetareihe:

§1 Konvergenz von Thetareihen

Im ersten Abschnitt wird die Konvergenz der Thetareihen behandelt

(1.1) Definition (obere Halbebene)
$\mathbb{H}$ ist die obere Halbebene, also

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}. \qquad \diamond$$

(1.2) Definition (Thetareihen)
Für $n \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$ ist die *Thetareihe* gegeben durch

$$\vartheta(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n^2 z + 2nw)}. \qquad \diamond$$

Der Begriff aus 1.2 führt uns sofort zu folgender Aussage:

(1.3) Satz

1. Die Thetareihe aus 1.2, also die Reihe
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n w}$$
konvergiert normal für $(z, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$.

2. Folgende Reihe konvergiert normal für $(z, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+w)^2 z}$$
◇

Beweis
Sei $z = u + iv$ und $w = x + iy$ aus einem Kompaktum vorgegeben mit $u, x, y \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}_+$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|e^{\pi i (n^2 z + 2nw)}\right| &= \left|e^{\pi i (n^2(u+iv) + 2n(x+iy))}\right| \\ &= \left|e^{\pi i (n^2 u + 2nx)}\right| \cdot \left|e^{-\pi (n^2 v + 2ny)}\right| \\ &= e^{-\pi (n^2 v + 2ny)} \end{aligned}$$

und da w vorgegeben ist, gilt zudem $n^2 v + 2ny \geq \frac{1}{2} n^2 v \geq \frac{1}{2} n^2 v_0$ für ein festes $v_0 \leq v$ (mit Ausnahme endlich vieler n).
Die Reihen
$$\sum_{n=-\infty}^{0} q^{n^2} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$$
sind Teilreihen geometrischer Reihen für $0 < q := e^{-\frac{\pi}{2} v_0} < 1$, da $v_0 \in \mathbb{R}_+$ fest ist, stellen also eine Majorante der Thetareihe
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + 2\pi i n w}$$
dar, welche also konvergiert. Damit ist gezeigt, dass $\vartheta(z, w)$ eine konvergente Funktion ist.

Sei nun $w = x + iy$ und $z = u + iv$ beliebig aus einem Kompaktum mit $u, x, y \in \mathbb{R}$,

$v \in \mathbb{R}_+$. Dann ist

$$\begin{aligned} |e^{\pi i(n+w)^2 z}| &= |e^{\pi i(u+iv)((x+n)^2-2(x+n+iy)-y^2)}| \\ &= |e^{\pi iu((x+n)^2-2(x+n+iy)-y^2)-\pi v((x+n)^2-2(x+n+iy)-y^2)}| \\ &= |e^{\pi i(u(x+n)^2-2u(x+n)-uy^2-2vy)}| \cdot |e^{\pi 2uy-\pi(v(x+n)^2+2v(x+n)+vy^2)}| \\ &= |e^{\pi(2uy-v(x+n)^2+2v(x+n)+vy^2)}| \\ &= e^{\pi(2uy+vy^2)} \cdot e^{-\pi v((x+n)^2-2(x+n))} \\ &= e^{\pi(2uy+vy^2)} \cdot e^{-\pi v(x^2-2x)} \cdot e^{-\pi v(2xn+n^2-2n)}, \end{aligned}$$

wobei $e^{\pi(2uy+vy^2)}$ und $e^{\pi v(x^2-2x)}$ einen von n unabhängigen Wert darstellen.
Nun sind u, v, y, x fest, vor allem existiert ein v_0 zu jedem v sodass $v > v_0 > 0$ und damit ist

$$\begin{aligned} v(2xn+n^2-2n) &= vn^2 + vn(x-2) \\ &\geq \frac{1}{2}v_0 n^2 \end{aligned}$$

für fast alle $n \in \mathbb{Z}$, sodass sich, analog zur anderen Reihe, wieder zwei Teilreihen geometrischer Reihen ergeben

$$\sum_{n=-\infty}^{0} q^{n^2} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}$$

mit $0 < q := e^{-\frac{\pi}{2}v_0} < 1$ (da $v_0 \in \mathbb{R}_+$), welche wieder eine konvergente Majorante darstellen, und damit konvergiert auch die zweite Reihe. □

§ 2 Die Jacobi'sche Thetatransformationsformel

(2.1) Satz (Jacobi'sche Thetatransformationsformel)
Sei $(z, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+w)^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2(-1/z)+2\pi i n w}$$

wobei die Quadratwurzel durch den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist. ◇

Beweis
Für festes z hat die Funktion

$$f(w) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z(n+w)^2}$$

Periode 1, da

$$\begin{aligned} f(w+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z(n+(w+1))^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z((n+1)+w)^2} \\ &= f(w) \end{aligned}$$

ist, und kann daher in eine Fourierreihe

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi i m w}$$

entwickelt werden, wobei

$$a_m = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z(n+w)^2 - 2\pi i m w} du$$

gilt und $w = u + iv$ ist. Der Imaginärteil v von w kann dabei zunächst beliebig gewählt werden.
Aufgrund der lokalen gleichmäßigen Konvergenz kann man die Summe und das Integral vertauschen, sodass Substitution durch $u \mapsto u - n$ folgendes liefert:

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{\pi i z(n+w)^2 - 2\pi i m w} du \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0-n}^{1-n} e^{\pi i z(n+(u-n)+iv)^2 - 2\pi i m((u-n)+iv)} du \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0-n}^{1-n} e^{\pi i z(u+iv)^2 - 2\pi i m(u+iv)} \cdot e^{2\pi i m n} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i z w^2 - 2\pi i m w} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (z w^2 - 2 m w)} du \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung liefert:

$$zw^2 - 2mw = z(w - \frac{m}{z})^2 - z^{-1}m^2$$

also

$$a_m = e^{-\pi i m^2 z^{-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i z (w-m/z)^2} du.$$

Nun soll $w - m/z$ reell sein. Dazu können wir den Imaginärteil v von w bei der Fourierentwicklung passend wählen. Man erhält

$$a_m = e^{\pi i m^2(-1/z)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i z u^2} du.$$

nach einer Translation von u, also

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z (n+w)^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i z u^2} du \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2(-1/z)} e^{2\pi i n w}$$

Man muss also nur noch das Integral berechnen, also die Formel

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i z u^2} du = \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}$$

beweisen. Beide Seiten sind lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, stellen analytische Funktionen in z dar, also muss man sie nur für rein imaginäre $z = iy$ zeigen. Damit ist es für eine nicht diskrete Teilmenge gezeigt, also gilt mit dem Identitätssatz die Gleichheit. Dazu Substituiert man $t = u \cdot \sqrt{y}$, also $u^2 = t^2/y$ und führt damit die Rechnung auf ein bekanntes Integral zurück:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y u^2} du &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\pi t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{y}} = \sqrt{y}^{-1} = \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}. \end{aligned}$$

□

Nun kann man die Jacobi'sche Thetatransformationsformel spezialisieren, was zu folgendem Satz führt.

(2.2) Satz
Die Funktion

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

ist eine analytische Funtion, die den Transformationsformeln

- $\vartheta(z+2) = \vartheta(z)$
- $\vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z)$

genügt und damit die Periode 2 hat.
Neben $\vartheta(z)$ betrachten wir auch noch $\tilde{\vartheta}(z) = \vartheta(z+1)$, mit

$$\tilde{\vartheta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n exp(\pi i n^2 z).$$

Dieses $\tilde{\vartheta}$ ist also ein spezieller Wert der Jacobi'schen Thetafunktion $\vartheta(z,w)$, nämlich:

$$\tilde{\vartheta}(z) = \vartheta(z, 1/2)$$

Aus 2.1 erhält man folgende Transformationsformel für $\tilde{\vartheta}$:

$$\tilde{\vartheta}(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)$$

wobei

$$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+1/2)^2 z}$$

ist. ◇

Beweis
Zunächst zur Periode:

$$\begin{aligned}
\vartheta(z+2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 (z+2)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \cdot e^{2\pi i n^2} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \\
&= \vartheta(z).
\end{aligned}$$

Und zu $\vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z)$:

$$\begin{aligned}
\vartheta(-\frac{1}{z}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 (-\frac{1}{z})} \\
&= \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \\
&= \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z).
\end{aligned}$$

□

Folgende Bemerkung fasst die Thetareihen nochmal zusammen.

(2.3) Definition (Diskriminante)
Die Diskriminante $\Delta(z)$ ist definiert durch:

$$\Delta := g_2^3 - 27g_3^2,$$

dabei sind $g_2 = 60G_4$ und $g_3 = 140G_6$ die Eisensteinreihen zum Gitter $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$. Und für die Transformation $z \mapsto z+1$ gilt $\Delta(z+1) = 1^{12} \cdot \Delta(z)$ und unter $z \mapsto -\frac{1}{z}$ gilt $\Delta(-\frac{1}{z}) = z^{12}\Delta(z)$. ◇

(2.4) Bemerkung
Folgende Thetareihen

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp(\pi i n^2 z),$$

$$\tilde{\vartheta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n exp(\pi i n^2 z) \text{ und}$$

$$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp(\pi i (n+1/2)^2 z)$$

genügen den Transformationsformeln

$$\vartheta(z+1) = \tilde{\vartheta}(z)\ ,\ \tilde{\vartheta}(z+1) = \vartheta(z)\ ,\ \tilde{\tilde{\vartheta}}(z+1) = e^{\pi i/4}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)\ ,$$

$$\vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z)\ ,\ \tilde{\vartheta}(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)\ ,\ \tilde{\tilde{\vartheta}}(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\vartheta}(z).$$

Damit folgt, dass die Funktion

$$f(z) = (\vartheta(z)\tilde{\vartheta}(z)\tilde{\tilde{\vartheta}}(z))^8$$

genauso wie die Diskriminante transformiert, der Quotient $\frac{f(z)}{\Delta(z)}$ also invariant unter den Substitutionen $z \mapsto z+1$ und $z \mapsto -\frac{1}{z}$ bleibt. Der Quotient ist also sogar unter der vollen Modulgruppe invariant, da diese beiden Substitutionen Erzeuger derselben sind. ◇

Beweis
Zu der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} exp(\pi i (n+1/2)^2 z).$$

Diese Reihe konvergiert (für $z = x + iy$), da

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |exp(\pi i(n+1/2)^2 z)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |exp(\pi i(n+1/2)^2 x - \pi(n+1/2)^2 y)| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |exp(\pi i(n+1/2)^2 x| \cdot |exp(-\pi(n+1/2)^2 y)| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |exp(-\pi(n+1/2)^2 y)| \\ &< \sum_{n=-\infty}^{\infty} |exp(-\pi(n+1/2)^2 c)|,\end{aligned}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < c < y$ konvergiert.
Damit folgt die Behauptung. □

(2.5) Bemerkung
Die Funktion f ist also eine Modulform, da die drei Thetareihen alle im Bereich $Im(z) \geq 1$ beschränkt sind. Die Reihe $\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)$ konvergiert für $Im(z) \to \infty$ gegen 0, daher ist die Funktion f zudem eine Spitzenform. ◇

Beweis
Zunächst zum Grenzverhalten der Reihe $\tilde{\tilde{\vartheta}}$: Da sie gleichmäßig konvergiert, können wir sie gliedweise betrachten. Betrachte die einzelnen Summanden also für $z \to i\infty$ mit $z = x + iy$.
Es ist

$$\begin{aligned}\pi i(n+1/2)^2 z &= \pi i(n+1/2)^2(x+iy) \\ &= \pi i(n+1/2)x - \pi(n+1/2)^2 y\end{aligned}$$

und für $z \to i\infty$ gilt $y \to \infty$, also

$$-\pi(n+1/2)^2 y \to -\infty$$

und damit gilt

$$exp(\pi i(n+1/2)^2 z) \to 0 \text{ für } z \to i\infty,$$

also konvergiert auch $\tilde{\tilde{\vartheta}} \to 0$ für $z \to i\infty$,
Nun zu der oberen Schranke. Für $z = x + iy$ ist

$$|\vartheta(z)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i n^2 z}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i n^2 x - \pi n^2 y}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-\pi n^2}|,$$

$$|\tilde{\vartheta}(z)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-1)^n e^{\pi i n^2 z}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-1)^n e^{\pi i n^2 x - \pi n^2 y}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-\pi n^2}| \text{ und}$$

$$|\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i (n+1/2)^2 z}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i (n+1/2)^2 x - \pi (n+1/2)^2 y}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-\pi (n+1/2)^2}|.$$

Also sind diese Reihen alle durch eine Reihe unabhängig von z beschränkt für $Im(z) > 1$. □

Dies führt zu folgendem Satz:

(2.6) Satz
Mit einer geeigneten Konstanen C gilt

$$\Delta(z) = C(\vartheta(z)\tilde{\vartheta}(z)\tilde{\tilde{\vartheta}}(z))^8.$$

Wobei für die Konstante gilt

$$C = \frac{(2\pi)^{12}}{2^8}$$

(ohne Beweis). ◇

— *Ein Zusammenhang zwischen der Diskriminante und Pentagonalzahlen* —

(2.7) Definition (Pentagonalzahl)
Eine Zahl $z \in \mathbb{Z}$ heißt Pentagonalzahl, wenn

$$z = \frac{3n^2 + n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

gilt. Die ersten Pentagonalzahlen sind $0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22$. ◇

(2.8) Satz
Es ist

$$\Delta(z) = Ce^{2\pi i z} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i z (3n^2 + n)} \right)^{24}.$$

Zudem kann man noch zeigen, dass C den Wert $(2\pi)^{12}$ annimmt. ◇

Beweis
Es ist zu zeigen, dass die rechte Seite sich wie eine Modulform von Gewicht 12 transformiert. Betrachte dazu

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i z(3n^2+n)}.$$

Diese Funktion hat zum einem Periode 1 und verschwindet in $i\infty$, da sie für $z = x + iy$ mit $y > c$ ($c \in \mathbb{R}_+$) beschränkt ist:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-1)^n e^{\pi i z(3n^2+n)}| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-1)^n e^{\pi i x(3n^2+n) - \pi y(3n^2+n)}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i x(3n^2+n)} e^{-\pi y(3n^2+n)}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-\pi y(3n^2+n)}| \\ &< \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-\pi c(3n^2+n)}|.\end{aligned}$$

Damit ist diese Reihe beschränkt, und durch den Vorfaktor $e^{\pi i z} = e^{\pi i x - \pi y}$ verschwindet die Reihe also in $i\infty$ (analog zum Beweis zur Bemerkung 2.5).
Diese Funktion kann nun mit der Thetareihe in Verbindung gebracht werden, es gilt:

$$f(z) = \vartheta(3z, \frac{1}{2} + \frac{z}{2}), \text{ also auch } f(-\frac{1}{z}) = \vartheta(-\frac{3}{z}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}).$$

Nun zeigen wir, dass damit folgendes gilt:

$$f(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z \frac{u^2}{12} - \pi i \frac{u}{6}}, \text{ mit } u = 2n+1,\, n \in \mathbb{Z}.$$

Dazu:

$$\begin{aligned}
f(-\frac{1}{z}) &= \vartheta(-\frac{3}{z}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2(-\frac{3}{z}) + 2\pi i n w} \text{ mit } w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z} \\
&= \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+w)^2 \frac{z}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z (n^2 + n - \frac{n}{z} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2}) \frac{1}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (\frac{n^2 z}{3} + \frac{nz}{3} - \frac{n}{3} + \frac{z}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12z})} \\
&= \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (z \frac{4n^2+4n+1}{12} - \frac{2n+1}{6})} \\
&= \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (z \frac{u^2}{12} - \frac{u}{6})} \text{ mit } u = 2n+1.
\end{aligned}$$

Desweiteren ist die rechte Seite invariant unter $u \mapsto -u$. Es gilt also, dass

$$f(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{\substack{u=-\infty \\ u \text{ ungerade}}}^{\infty} e^{\pi i z \frac{u^2}{12}} \left(\frac{e^{\frac{-\pi i u}{6}} + e^{\frac{\pi i u}{6}}}{2} \right)$$

ist, während u alle ungeraden ganzen Zahlen durchläuft. Der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{\pi i u}{6}} + e^{\frac{\pi i u}{6}} \right) = cos \left(\frac{\pi u}{6} \right)$$

kann durch Fallunterscheidung berechnet werden, sodass für ungerade u gilt, dass

$$u \equiv \pm 1 \text{ oder } u \equiv 3 \text{ mod } 6.$$

Im Falle $u \equiv 3 \mod 6$ verschwindet der Ausdruck, da sich die Summanden nicht ändern, wenn man u durch $-u$ ersetzt. Wir summieren also über die Nebenklassen mit $u \equiv 1 \mod 6$ und verdoppeln dann. Als nächstes substituiert man $u = 6v + 1$ und betrachtet

$$cos(\frac{\pi u}{6}) = cos(\frac{\pi}{6} + \pi v) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-1)^v.$$

Man kann nun leicht sehen, dass

$$\begin{aligned}
f(-\frac{1}{z}) &= \sqrt{\frac{z}{3i}}e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{\substack{u=-\infty \\ u \text{ ungerade}}} e^{\pi i z \frac{u^2}{12}} \frac{e^{\frac{-\pi i u}{6}} + e^{\frac{\pi i u}{6}}}{2} \\
&= \sqrt{\frac{z}{3i}}e^{\frac{\pi i}{12z}} 2 \sum_{\substack{u=-\infty \\ u \equiv_6 1}} e^{\pi i z \frac{u^2}{12}} \frac{\sqrt{3}}{2} (-1)^{\frac{u-1}{6}} \\
&= \sqrt{\frac{z}{i}}e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{1 \equiv_6 u \in \mathbb{Z}} e^{\pi i z \frac{u^2}{12}} (-1)^{\frac{u-1}{6}} \\
&= \sqrt{\frac{z}{i}}e^{\frac{\pi i}{12z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z \frac{(6n+1)^2}{12}} (-1)^n \\
&= \sqrt{\frac{z}{i}}e^{\frac{\pi i}{12z} + \frac{\pi i z}{12}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i z (3n^2+n)} \\
&= \sqrt{\frac{z}{i}}e^{\frac{\pi i z}{12} + \frac{\pi i}{12z}} f(z)
\end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. □

Alle Thetareihen, die bisher betrachtet wurden, sind Spezialfälle eines bestimmten Types, welche man quadratischen Formen bzw. Gittern zuordnen kann.

— *Quadratische Formen* —

Im folgendem ist $A = A^{(n,m)}$ die Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Falls $n = m$ gegeben ist, schreibt man auch $A = A^{(n)}$ und nennt A eine n-reihige Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

und die zu A transponierte Matrix ist

$$A^{tr} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Für eine symmetrische Matrix S (also $S = S^{tr}$) gilt, dass auch $S[A] := A^{tr}SA$ symmetrisch ist und es gelten die Rechenregeln $S[AB] = S[A][B]$.
Wenn z speziell ein n-reihiger Spaltenvektor ist, so ist

$$S[z] = \sum_{1 \leq \mu,\nu \leq n} s_{\mu\nu} z_\mu z_\nu$$

eine 1×1 Matrix, welche wir im weiteren mit einer Zahl identifizieren werden. Die der Matrix S zugeordnete Quadratische Form ist die Funktion $z \mapsto S[z]$, wobei eine symmetrische Matrix durch ihre Quadratische Form eindeutig bestimmt ist.
Eine reelle symmetrische Matrix S heißt dabei positiv definit (oder positiv), falls $S[x] > 0$ für alle von 0 verschiedenen Spalten x gilt.
Aus der Linearen Algebra sind dazu zwei Eigenschaften bekannt:

(2.9) Bemerkung
Sei S eine reelle symmetrische positive Matrix. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$S[x] \geq \delta(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

gilt. Jede positive Matrix S kann man in der Form $S = A^{tr}A$ schreiben, wobei A eine invertierbare reelle (quadratische) Matrix ist mit positiver Determinante.
Dabei ist jede Matrix dieser Form positiv definit, allgemeiner:
Ist S eine positive Matrix und A eine reelle Matrix mit $Rang(A) = m$, so gilt auch $S[A]$ ist positiv. $\diamond$

(2.10) Bemerkung
Jeder positiven Matrix S kann man eine Thetareihe zuordnen, mit

$$\vartheta(S; z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} exp(\pi i S[g] z) \qquad \diamond$$

Diese Reihe hat zahlentheoretische Bedeutung, denn wenn S ganz ist, dann ist $\vartheta(S; z)$ eine periodische Funktion mit Periode 2, wobei die Fourierentwicklung

$$\vartheta(S; z) = \sum_{m=0}^{\infty} A(S, m) e^{\pi i m z}$$

ist und dabei $A(S, m) := \#\{g \in \mathbb{Z}^n; S[g] = m\}$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl m durch die quadratische Form S ist.
Im folgenden gebe ich noch einen kurzen Ausblick in diesen Bereich.
Wenn S die Einheitsmatrix ist, zerfällt diese Reihe in ein Cauchyprodukt von n Thetareihen $\vartheta(z)$,

$$\vartheta(E; z) = \vartheta(z)^n.$$

Dabei folgt die Konvergenz dieser Reihe mit Hilfe des Cauchy'schen Multiplikationssatzes.
Da es zudem zu jeder positiven Matrix S ein $\delta \in \mathbb{Z}_+$ gibt, sodass gilt: $S[x] \geq \delta E[x]$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, folgt die Konvergenz der Thetareihe allgemein. Wir betrachten also allgemeiner die Reihe

$$f(z,w) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} exp(\pi i S[g+w]z),\ z \in \mathbb{H},\ w \in \mathbb{C}^n.$$

Wobei, falls $S = (1)$ ist, ist dies die Jacobi'sche Thetareihe.
Die Jacobi'sche Thetatransformationsformel kann man dann so verallgemeinern

(2.11) Satz (Verallgemeinerte Thetatransformationsformel)
S sei eine positiv definite Matrix, dann gilt:

$$\sqrt{\frac{z}{i}}^n \sqrt{detS} \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i S[g+w]z} = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i (S^{-1}[g](-1/z) + 2g'w)}$$

(ohne Beweis). ◇

Und hier erhalten wir einen wichtigen Spezialfall der Jacobi'schen Thetratransformationsformel.

(2.12) Satz (Thetatransformationsformel)

$$\vartheta(S^{-1}; -z^{-1}) = \sqrt{\frac{z}{i}}^n \sqrt{\det S}\vartheta(S; z)$$

(ohne Beweis). ◇

Insebsondere gilt für unimodulare Matrizen S ($det(S) = \pm 1$ und S, S^{-1} ganzzahlig) die Transformationsformel

$$\vartheta(S; -z^{-1}) = \sqrt{\frac{z}{i}}^n \vartheta(S; z),$$

denn für unimodulare Matrizen gilt, dass $S = S^{-1}[S]$ ist, sodass in der Transformationsformel nur der Übergang von $z \to -z^{-1}$ nachvollzogen werden muss und nicht zusätzlich $S \to S^{-1}$.

Literatur

[1] E.Freitag, R.Busam, *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag, 2006