

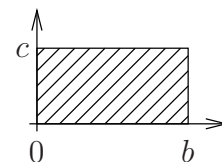
# Kapitel VI.

## Das RIEMANN-Integral

Die Fläche eines Rechtecks mit den Kantenlängen  $c$  und  $b$  ist  $c \cdot b$ .  
Betrachtet man die konstante Funktion

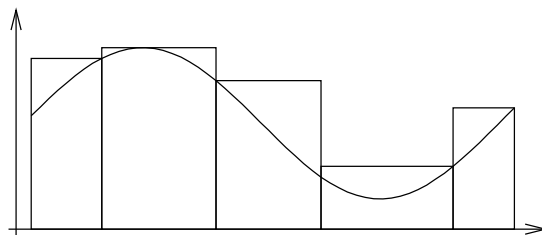
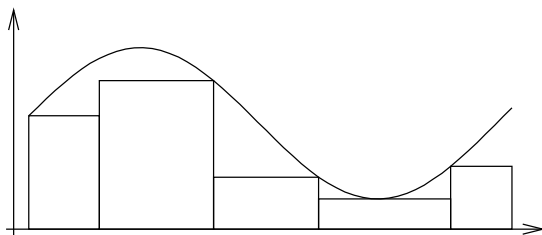
$$f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto c,$$

so ist die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$  gerade  $c \cdot b$ . Man schreibt dafür



$$\int_0^b f(x) dx = c \cdot b.$$

Das Ziel der Integralrechnung ist es, diese Fläche für eine möglichst große Klasse von Funktionen zu bestimmen. Dabei soll der Flächeninhalt durch Rechtecke von oben und von unten approximiert werden.



### §1. Der Begriff des RIEMANN-Integrals

Um mit Rechtecken arbeiten zu können, interessieren wir uns für stückweise konstante Funktionen.

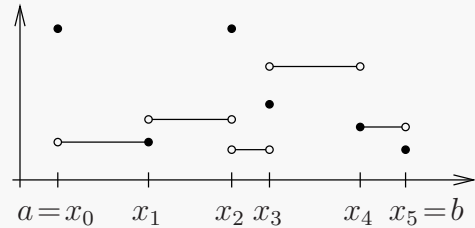
**(1.1) Definition.** a) Eine *Zerlegung* des Intervalls  $[a, b]$  ist eine endliche reelle Folge  $Z = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ , so dass

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

b) Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man eine *RIEMANNsche Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung  $Z = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  von  $[a, b]$  gibt, so dass

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} \text{ konstant ist für } 1 \leq i \leq n.$$

Mit  $T[a, b]$  bezeichnen wir die Menge der Treppenfunktionen auf  $[a, b]$ .



Eine erste strukturelle Eigenschaft beschreibt das

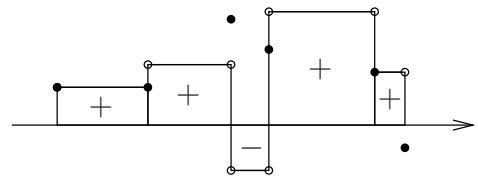
**(1.2) Lemma.** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  ist  $T[a, b]$  ein Unterraum des Vektorraums aller Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Die konstanten Funktionen gehören zu  $T[a, b]$ . Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\varphi \in T[a, b]$  gilt  $\lambda\varphi \in T[a, b]$ . Sind  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit Zerlegungen  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ,  $(y_j)_{0 \leq j \leq m}$ , so dass  $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)}$  und  $\psi|_{(y_{j-1}, y_j)}$  jeweils konstant sind, so betrachten wir eine Zerlegung  $(t_r)_{0 \leq r \leq k}$  von  $[a, b]$  mit

$$\{t_0, \dots, t_k\} = \{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}.$$

Mit  $\varphi|_{(t_{r-1}, t_r)}$  und  $\psi|_{(t_{r-1}, t_r)}$  ist dann auch  $(\varphi + \psi)|_{(t_{r-1}, t_r)}$  für jedes  $r = 1, \dots, k$  konstant, d. h.  $\varphi + \psi \in T[a, b]$ .  $\square$

Wir wollen nun das RIEMANN-Integral für Treppenfunktionen erklären. Dazu addieren wir die Flächen der Rechtecke, wobei Rechtecke unterhalb der  $x$ -Achse negativ gewichtet werden.



**(1.3) Lemma.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $\varphi \in T[a, b]$ . Gegeben seien zwei Zerlegungen  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  und  $(y_j)_{0 \leq j \leq m}$  von  $[a, b]$ , so dass

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \varphi|_{(y_{j-1}, y_j)} = d_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^m d_j (y_j - y_{j-1}).$$

**Beweis.** Für die Zerlegung  $Z = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  definieren wir

$$\int_Z \varphi := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

1. *Fall:* Jeder Teilpunkt von  $Z = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  ist Teilpunkt von  $Z' = (y_j)_{0 \leq j \leq m}$ .  
Dann gilt  $x_i = y_{k_i}$ ,  $i = 0, \dots, n$  und

$$x_{i-1} = y_{k_{i-1}} < y_{k_{i-1}+1} < \dots < y_{k_i} = x_i, \quad d_j = c_i, \quad k_{i-1} < j \leq k_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Daraus folgt

$$\int_{Z'} \varphi = \sum_{j=1}^m d_j(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_Z \varphi.$$

2. *Fall:* Seien  $Z$  und  $Z'$  beliebig.

Ist  $Z^*$  die Zerlegung von  $[a, b]$ , die genau aus den Teilpunkten von  $Z$  und  $Z'$  besteht, so folgt aus dem 1. Fall

$$\int_Z \varphi = \int_{Z^*} \varphi = \int_{Z'} \varphi. \quad \square$$

Das führt uns auf die

**(1.4) Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\varphi \in T[a, b]$  mit einer Zerlegung  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ , so dass  $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist das RIEMANN-Integral von  $\varphi$  über  $[a, b]$  erklärt durch

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \int_a^b \varphi := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Nach (1.3) ist die Definition unabhängig von der Wahl der Zerlegung.

**(1.5) Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beliebige Funktionen. Man definiert  $f \leq g$  (bzw.  $g \geq f$ ) genau dann, wenn  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .

Man beachte, dass im Allgemeinen weder  $f \leq g$  noch  $g \leq f$  gilt. Die folgende Aussage besagt, dass das RIEMANN-Integral ein monotonen lineares Funktional auf  $T[a, b]$  ist.

**(1.6) Lemma.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\varphi, \psi \in T[a, b]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

a)  $\int_a^b \varphi(x) + \psi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx.$

b)  $\int_a^b \lambda \varphi(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx.$

c) Aus  $\varphi \leq \psi$  folgt  $\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx.$

**Beweis.** Nach (1.3) kann man  $\varphi$  und  $\psi$  bezüglich derselben Zerlegung von  $[a, b]$  definieren:

$$a = x_0 < \dots < x_n = b, \quad \varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i, \quad \psi|_{(x_{i-1}, x_i)} = d_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

a) Aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) + \psi(x) dx &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx. \end{aligned}$$

b) Man hat

$$\int_a^b \lambda \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda c_i (x_i - x_{i-1}) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx.$$

c) Aus  $\varphi \leq \psi$  folgt  $c_i \leq d_i$  für  $1 \leq i \leq n$ . Wegen  $x_i - x_{i-1} > 0$  ergibt sich

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n d_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \psi(x) dx. \quad \square$$

Man beachte das folgende Beispiel

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \equiv 0; \quad \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt  $\varphi \leq \psi$ ,  $\varphi \neq \psi$  und  $\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0 \cdot 1 = 0$ .

Treppenfunktionen haben wir bereits früher kennen gelernt, z. B. die Signum-Funktion und die Größte-Ganze-Funktion (vgl. I(3.2)) eingeschränkt auf ein Intervall  $[a, b]$ .

**(1.7) Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann sind das *Oberintegral* und das *Unterintegral von  $f$  über  $[a, b]$*  definiert durch

$$\begin{aligned} \int_a^{b*} f(x) dx &:= \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx; \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\}, \\ \int_{a*}^b f(x) dx &:= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx; \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\}. \end{aligned}$$

Weil  $f$  nach Voraussetzung beschränkt ist, existieren (z. B. konstante) Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$ , so dass die Mengen, über die das Infimum bzw. Supremum gebildet wird, nicht leer sind. Dass der Wert des Infimums und des Supremums tatsächlich endlich ist, wird in (1.9) a) gezeigt. Als Warnung sei vermerkt, dass es im Allgemeinen keine Treppenfunktion gibt, die obiges Infimum bzw. Supremum realisiert.

**(1.8) Beispiele.** a) Für jedes  $\varphi \in T[a, b]$  gilt

$$\int_{a^*}^b \varphi(x) dx = \int_a^{b^*} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

b) Sei  $D$  die DIRICHLETSche Sprungfunktion auf  $[0, 1]$

$$D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seien  $\varphi, \psi \in T[0, 1]$  mit  $\varphi \leq D \leq \psi$ . Sei  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  eine Zerlegung von  $[0, 1]$  und gilt

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i \leq D|_{(x_{i-1}, x_i)} \leq d_i = \psi|_{(x_{i-1}, x_i)},$$

so folgt  $c_i \leq 0$  und  $d_i \geq 1$ , da jedes nicht-leere offene Intervall sowohl rationale (vgl. I(2.24)) als auch irrationale Punkte (vgl. II(3.17)) enthält. Also hat man

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \leq 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx \geq 1.$$

Mit den konstanten Funktionen  $\varphi \equiv 0$  und  $\psi \equiv 1$  folgt

$$\int_{0^*}^1 D(x) dx = 0, \quad \int_0^{1^*} D(x) dx = 1.$$

Eine erste Aussage für Ober- und Unterintegral beinhaltet das folgende

**(1.9) Lemma.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

a) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sind  $m, M \in \mathbb{R}$  mit

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

so gilt

$$m(b-a) \leq \int_{a^*}^b f(x) dx \leq \int_a^{b^*} f(x) dx \leq M(b-a).$$

b) Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, so folgt

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} f(x) + g(x) dx &\leq \int_a^{b^*} f(x) dx + \int_a^{b^*} g(x) dx, \\ \int_{a^*}^b f(x) + g(x) dx &\geq \int_{a^*}^b f(x) dx + \int_{a^*}^b g(x) dx. \end{aligned}$$

c) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, so gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \leq 0$ :

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^{b^*} f(x) dx, & \int_{a^*}^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_{a^*}^b f(x) dx, \\ \int_a^{b^*} \beta f(x) dx &= \beta \int_a^b f(x) dx, & \int_{a^*}^b \beta f(x) dx &= \beta \int_a^{b^*} f(x) dx. \end{aligned}$$

**Beweis.** a) Betrachtet man konstante Treppenfunktionen, so folgt aus  $m \leq f \leq M$  mit (1.6) c) bereits

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_{a^*}^b f(x) \, dx, \quad \int_a^{b^*} f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a).$$

Für alle  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  gilt nach (1.6) und (1.7)

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \, dx &\leq \int_a^b \psi(x) \, dx, \\ \int_{a^*}^b f(x) \, dx &= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) \, dx; \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \leq \int_a^b \psi(x) \, dx, \\ \int_a^{b^*} f(x) \, dx &\leq \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) \, dx; \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\} = \int_a^{b^*} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

b) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit

$$\begin{aligned} f \leq \varphi, \quad \int_a^b \varphi(x) \, dx &\leq \int_a^{b^*} f(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{2}, \\ g \leq \psi, \quad \int_a^b \psi(x) \, dx &\leq \int_a^{b^*} g(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

nach Definition des Infimums. Es folgt  $f + g \leq \varphi + \psi$  und mit (1.6)

$$\begin{aligned} \int_a^{b^*} f(x) + g(x) \, dx &\leq \int_a^b \varphi(x) + \psi(x) \, dx \\ &= \int_a^b \varphi(x) \, dx + \int_a^b \psi(x) \, dx \leq \int_a^{b^*} f(x) \, dx + \int_a^{b^*} g(x) \, dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichungen für alle  $\varepsilon > 0$  gelten, schließt man

$$\int_a^{b^*} f(x) + g(x) \, dx \leq \int_a^{b^*} f(x) \, dx + \int_a^{b^*} g(x) \, dx.$$

Die zweite Behauptung folgt analog oder aus

$$\int_{a^*}^b f(x) \, dx = - \int_a^{b^*} -f(x) \, dx.$$

c) Für  $\lambda = 0$  ist die Behauptung klar. Ist  $\lambda > 0$ , so gilt  $\varphi \leq f$  genau dann, wenn  $\lambda\varphi \leq \lambda f$ . Jetzt folgt die Behauptung aus

$$\sup\{\kappa m; m \in M\} = \begin{cases} \kappa \sup M, & \text{falls } \kappa \geq 0, \\ \kappa \inf M, & \text{falls } \kappa \leq 0, \end{cases}$$

für beschränktes  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $M \neq \emptyset$ , und  $\kappa \in \mathbb{R}$ . □

Das führt uns auf die wichtige

**(1.10) Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt RIEMANN-integrierbar oder einfach nur integrierbar, wenn sie beschränkt ist und  $\int_{a^*}^b f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx$  erfüllt. Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(t) dt := \int_a^b f(\xi) d\xi := \int_a^b f := \int_{a^*}^b f(x) dx$$

das RIEMANN-Integral von  $f$  über  $[a, b]$ . Man nennt  $a$  die Untergrenze und  $b$  die Obergrenze des Integrals.

Wir erläutern den Begriff zunächst an Beispielen.

**(1.11) Beispiele.** a) Nach (1.8) ist jede Treppenfunktion integrierbar. Die in (1.4) und (1.10) definierten Integrale stimmen überein.

b) Die DIRICHLETSche Sprungfunktion über  $[0, 1]$  ist nach (1.8) nicht integrierbar.

c) Wir betrachten

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}, \text{ gekürzte Bruchdarstellung.} \end{cases}$$

Offenbar gilt  $0 \leq f$  und damit

$$0 \leq \int_{0^*}^1 f(x) dx \leq \int_0^{1^*} f(x) dx.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$M := \left\{ \frac{p}{q}; 1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}, 0 \leq p \leq q \right\}$$

endlich und wir erhalten eine Treppenfunktion

$$\psi \in T[0, 1], \quad \psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in M, \\ \varepsilon, & \text{falls } x \notin M. \end{cases}$$

Aus  $f \leq \psi$  folgt

$$\int_0^{1^*} f(x) dx \leq \int_0^1 \psi(x) dx = \varepsilon$$

für jedes  $\varepsilon > 0$ . Demnach ist  $f$  integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Es ist ziemlich aufwändig, Integrale mit der Definition (1.10) zu berechnen. Wir werden in §2 Methoden kennen lernen, die die konkrete Berechnung von Integralen für Standardfunktionen ermöglichen.

Ein für theoretische Zwecke nützliches Kriterium beinhaltet der

**(1.12) Satz.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann RIEMANN-integrierbar, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  gibt, so dass

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Nach Definition des Infimums und des Supremums existieren zu jedem  $\varepsilon > 0$  nach (1.7) Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\int_a^b \varphi(x) dx \geq \int_{a^*}^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^{b^*} f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da  $f$  integrierbar ist, folgt

$$\int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^{b^*} f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_{a^*}^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„ $\Leftarrow$ “ Wegen  $\varphi \leq f \leq \psi$  ist  $f$  beschränkt. Mit (1.9) ergibt sich

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_{a^*}^b f(x) dx \leq \int_a^{b^*} f(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx,$$

also

$$0 \leq \int_a^{b^*} f(x) dx - \int_{a^*}^b f(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Demnach stimmen Ober- und Unterintegral überein. □

Direkt aus dem Beweis folgert man noch das

**(1.13) Korollar.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $I \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann sind äquivalent:

(i)  $f$  ist RIEMANN-integrierbar mit  $\int_a^b f(x) dx = I$ .

(ii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es Treppenfunktionen  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad I - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon, \quad \int_a^b \psi(x) dx - I \leq \varepsilon.$$

Als Anwendung erhalten wir die Aussage, dass die Abänderung einer Funktion an endlich vielen Stellen weder die RIEMANN-Integrierbarkeit noch das Integral verändert.



**(1.14) Korollar.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine RIEMANN-integrierbare Funktion und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion, so dass

$$\{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$$

endlich ist. Dann ist auch  $g$  RIEMANN-integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$  und  $I = \int_a^b f(x) dx$ . Nach (1.13) gibt es  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  mit

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad I - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon, \quad \int_a^b \psi(x) dx - I \leq \varepsilon.$$

Sei  $M := \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$ . Da  $M$  endlich ist, sind

$$\varphi^*(x) := \begin{cases} g(x), & x \in M, \\ \varphi(x), & x \notin M, \end{cases} \quad \psi^*(x) := \begin{cases} g(x), & x \in M, \\ \psi(x), & x \notin M, \end{cases}$$

Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  mit den Eigenschaften

$$\varphi^* \leq g \leq \psi^*, \quad \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi^*(x) dx, \quad \int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b \psi^*(x) dx,$$

also

$$I - \int_a^b \varphi^*(x) dx \leq \varepsilon, \quad \int_a^b \psi^*(x) dx - I \leq \varepsilon.$$

Dann ist  $g$  nach (1.13) RIEMANN-integrierbar mit  $\int_a^b g(x) dx = I$ . □

Wir kommen nun zu den wichtigsten Beispielklassen integrierbarer Funktionen.

**(1.15) Satz.** Sind  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , so ist jede monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar.

**Beweis.** Sei  $f$  ohne Einschränkung monoton wachsend. Zu  $n \in \mathbb{N}$  betrachte man die äquidistante Zerlegung

$$(x_i)_{0 \leq i \leq n}, \quad x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Wir definieren  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  durch

$$\varphi(x) := f(x_{i-1}), \quad \psi(x) := f(x_i) \quad \text{für} \quad x_{i-1} \leq x < x_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \varphi(b) = \psi(b) = f(b).$$

Da  $f$  monoton wachsend ist, gilt  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \right) = \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wählt man nun ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon$ . Also ist  $f$  nach (1.12) integrierbar.  $\square$

Das nächste zentrale Beispiel wird behandelt in dem

**(1.16) Satz.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Dann ist jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar.

**Beweis.** Da  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall ist, ist  $f$  nach IV(3.13) gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$ . Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt

$$(*) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon', \quad \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Nun wählen wir ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{b-a}{n} < \delta$  und betrachten wieder die äquidistante Zerlegung

$$(x_i)_{0 \leq i \leq n}, \quad x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Wir definieren  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  durch

$$\varphi(x) := f(x_i) - \varepsilon', \quad \psi(x) := f(x_i) + \varepsilon' \quad \text{für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \varphi(b) = \psi(b) = f(b).$$

Wegen (\*) folgt  $\varphi \leq f \leq \psi$  aus der Wahl von  $n$ . Dann erhält man

$$\int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx = 2\varepsilon'(b-a) = \varepsilon.$$

Die Behauptung ergibt sich wieder aus (1.12)  $\square$

Wir stellen nun einige elementare Eigenschaften des RIEMANN-Integrals zusammen.