Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Priv.-Doz. Dr. O. Wittich, C. Schnackers

Aachen, den 2. April 2012

1. Übung zur Vorlesung Analysis II

Abgabe bis Mittwoch, den 11.04.2012, 12:00 Uhr

Zur Bearbeitung dieses Übungsblattes können Sie die folgende Definition und das folgende Korollar benutzen.

(4.1)* Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *strikt konvex*, wenn für alle $x_0, x_1 \in I$ mit $x_0 \neq x_1$ und $0 < \lambda < 1$ gilt

$$f(x_\lambda) < (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \quad \text{für } x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1.$$

(4.3)* Korollar. Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall $\overset{\circ}{I}$ zweimal differenzierbar. Dann sind äquivalent:

a) f ist strikt konvex.

b) $f''(x) > 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$.

Tutoraufgaben

Die folgenden Tutoraufgaben dienen der Vorbereitung der schriftlich abzugebenden Aufgaben. Sie werden in den Tutorgruppen besprochen.

Tutoraufgabe 1 Poisson Grenzwert-Formel

Die Poisson Grenzwert-Formel ist für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} = \frac{x^k}{k!} e^{-x}$$

gegeben. Zeigen Sie die Poisson-Grenzwertformel für $k = 0$ mit der Regel von L´Hospital.

Tutoraufgabe 2

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert auf geeigneter Weise

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^5 e^{-x}}.$$

Tutoraufgabe 3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, mit $|I| > 1$

a) i) für f, g konvexe Funktionen auf I und $\alpha, \beta \geqslant 0$ zeigen Sie, dass $\alpha f + \beta g$ ebenfalls konvex ist auf I.

   ii) Wie kann das obige Resultat auf strikt konvexe Funktionen erweitert werden?

b) Beweisen Sie oder wiederlegen Sie die folgende Aussage:
Ist f konvex auf I, so ist f stetig auf I.

c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, zeigen Sie, dass f höchstens ein lokales Minimum besitzt, das dann globales Minimum ist.

Tutoraufgabe 4

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1$ und $f'''(x) = f(x)$

a) Zeigen Sie per Induktion, dass die Funktion, die die obigen Bedingungen erfüllt, aus $C^\infty(I)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt 0 dieser Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

c) Geben Sie die Taylor-Reihe dieser Funktion explizit an.

Hausaufgaben

Bearbeiten Sie bitte die folgenden schriftlichen Aufgaben. Für diese ist oben angegebenes Abgabedatum gültig. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Tutorgruppe versehen werden. Sie sollten Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 5 (3+2+2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Konvexität bzw. Konkavität:

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 + ax^2 + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (4+2+2+2 Punkte)

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex.

i) Ist f nicht konstant, so wird das Maximum von f nicht im Innern von I angenommen.

ii) Ist f zusätzlich auch noch stetig, so nimmt f das Maximum auf einem Punkt $x \in \{a, b\}$ an.

iii) Ist f strikt konvex, so wird das Minimium von f in höchstens einem Punkt $x \in [a, b]$ angenommen.

iv) Ist f strikt konvex und stetig, so wird das Minimum in genau einem Punkt $x \in [a, b]$ angenommen.

Aufgabe 7 (6+2 Punkte)

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = (a, b)$. Sei weiterhin $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar mit der Eigenschaft: Es gibt ein $M > 0$, so dass für alle $x \in I$ gilt

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n \, n!$$

für alle $n \geqslant 0$.

a) Zeigen Sie: Für jedes $x_0 \in I$ konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 auf der Menge $\{x \in I \, : \, |x - x_0| < M^{-1}\}$ und stellt dort die Funktion dar.

b) Warum ist diese Aussage falsch für das Gegenbeispiel

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \geqslant 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

aus der Vorlesung? (Es reicht, wenn Sie dies kurz Begründen, ein ausführlicher Beweis wird nicht erwartet).

Aufgabe 8 (2+2+6 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Mengen $S_p(1) := \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x\|_p = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ für $p = 1, 2, 4$.

b) Zeigen Sie, dass die Minkowski-Ungleichung für $p = \frac{1}{2}$ falsch ist.

c) Seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ und $p > 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \sum_{k=1}^{4} |x - a_k|^p$ genau ein Minimum besitzt. Was passiert für $p = 1$?

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Mittwoch, den 11.04.2012, um 12:00 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.