§5. Holomorphie im Unendlichen

Nach V(3.7) ist $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine kompakter HAUSDORFF-Raum. In diesem Paragrafen führen wir neben der topologischen noch eine komplexe Struktur ein und erklären die Holomorphie im Unendlichen.

Für das Rechnen mit ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$ gelten die folgenden Regeln

$$a \pm \infty = \infty, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \infty \cdot \infty = b \cdot \infty = \frac{b}{0} = \infty, \quad \frac{b}{\infty} = 0, \quad b \in \mathbb{C}^*.$$

Die Verknüpfungen $0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert und müssen jeweils durch Grenzwertbetrachtungen berechnet werden.

(5.1) Definition. Sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine offene Umgebung von ∞, d. h., es gibt ein $r > 0$ mit

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K_r(0)} \subset U.$$

Zu $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ betrachten wir

$$F : K_{1/r}(0) \to \hat{\mathbb{C}},\ F(z) := f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ für } z \neq 0 \text{ und } F(0) := f(\infty).$$

Man nennt f *holomorph* bzw. *meromorph in* ∞, wenn F holomorph bzw. meromorph in 0 ist. Die Ordnung der w-Stelle oder Polstelle von f in ∞ ist dann die Ordnung der w-Stelle oder Polstelle von F in 0. Man nennt f *holomorph* bzw. *meromorph* auf U, wenn f in allen Punkten aus U bzw. in $U \setminus P_f$ holomorph ist, wobei P_f diskret in U ist und in den Punkten von P_f Pole vorliegen.

Weil die Abbildung

$$\varphi : K_{1/r}(0) \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K_r(0)},\ z \mapsto \frac{1}{z},$$

bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} stetig sind, folgt das

(5.2) Lemma. *Sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen. Dann ist jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ stetig.*

$\hat{\mathbb{C}}$ ist kompakt und jede stetige Funktion $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ ist somit beschränkt. Mit dem Satz von Liouville III(4.8) folgt der

(5.3) Satz. *Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ holomorphen Funktionen sind genau die Konstanten.*

Als Verallgemeinerung notieren wir den

(5.4) Satz. *Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen, die auf $\mathbb{C}$ holomorph sind, sind genau die Polynomfunktionen.*

Beweis. Eine ganze Funktion f wird gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

In (5.1) hat man dann

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}^*.$$

f hat in ∞ höchstens einen Pol, wenn F in 0 höchstens einen Pol hat. Das ist äquivalent zu $a_n = 0$ für alle $n \geqslant N$, d. h. zu $f \in \mathbb{C}[z]$. Andererseits ist jede Polynomfunktion nach dem Gezeigten meromorph auf $\hat{\mathbb{C}}$ und offenbar holomorph auf $\mathbb{C}$. $\square$

Natürlich bilden die meromorphen $\mathcal{M}(G)$ auf einem Gebiet $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ wieder einen Körper. Für $G = \hat{\mathbb{C}}$ können wir diesen Körper einfach beschreiben.

(5.5) Satz. *Die auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen.*

Beweis. Für $r(z) \in \mathbb{C}(z)$ gilt auch $R(z) = r\left(\frac{1}{z}\right) \in \mathbb{C}(z)$. Also ist jede rationale Funktion meromoph auf $\hat{\mathbb{C}}$. Sei nun $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist die Polstellenmenge P_f diskret in $\hat{\mathbb{C}}$. Weil $\hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist P_f endlich. Sei

$$\{z_1, \dots, z_m\} = P_f \cap \mathbb{C}$$

und $h_j(z) \in \mathbb{C}(z)$ der Hauptteil von f um z_j. Dann ist

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{m} h_j(z)$$

wieder meromorph auf $\hat{\mathbb{C}}$ mit einer holomorphen Fortsetzung in allen Punkten von $\mathbb{C}$. Nach (5.4) ist $g(z)$ eine Polynomfunktion und $f(z)$ somit eine rationale Funktion. $\square$

Anders als für Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ ist $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ somit **nicht** der Quotientenkörper von $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$.