also

$$A \cdot \sqrt{4\pi} = \frac{2^z \cdot \varphi(\frac{z}{2}) \cdot \varphi(\frac{z+1}{2})}{\varphi(z)}, \quad z \in \mathcal{H}.$$

Nun setzt man $z = n \in \mathbb{N}$ und folgert

$$\begin{aligned} & A \cdot \sqrt{4\pi} \\ = & \frac{\sqrt{2\pi} \cdot 2^n \cdot (\frac{n}{2})^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{H(\frac{n}{2})} \cdot (\frac{n+1}{2})^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n+1}{2}} \cdot e^{H(\frac{n+1}{2})}}{n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{H(n)}} \\ = & \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} + H(\frac{n}{2}) + H(\frac{n+1}{2}) - H(n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{4\pi}, \end{aligned}$$

denn $((1+\frac{1}{n})^{n/2} = \sqrt{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{e}$ und $H(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ nach (3.10). Daraus folgt $A = 1$ und mit dem Idenditätssatz die Behauptung. □

Als Anwendung formulieren wir die klassische STIRLINGsche Formel als

(3.12) Korollar. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\vartheta = \vartheta_n$ mit $0 \leq \vartheta \leq 1$ und*

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\vartheta/12n}.$$

Beweis. Nach (3.11) gilt

$$n! = n \cdot \Gamma(n) = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot e^{H(n)} = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{H(n)}$$

sowie mit $\delta = 0$ auch noch

$$0 \leq H(n) \leq \frac{1}{12n}.$$

Also gibt es ein $0 \leq \vartheta \leq 1$ mit $H(n) = \frac{\vartheta}{12n}$. □

Asymptotisch gilt also

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\vartheta_n/12n} = 1.$$

le

§4. Die RIEMANNsche Zetafunktion

In diesem Paragrafen beschäftigen wir uns als Anwendung der bisherigen Ergebnisse dieses Paragrafen mit der RIEMANNschen Zetafunktion. Wir haben bereits in Kapitel VI, §4 eine Formel für die Werte an den geraden Stellen $2k$, $k \in \mathbb{N}$, kennen gelernt. Nun untersuchen wir das analytische Verhalten.

Im ersten Schritt betrachten wir eine Produktentwicklung der RIEMANNschen Zetafunktion. Dabei durchläuft p stets die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen in $\mathbb{N}$. Ein derartiges Produkt nennt man ein EULER-*Produkt*.

(4.1) Satz. *Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = Re(s) > 1$ gilt*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1},$$

wobei das Produkt absolut konvergiert.

Beweis. Wegen $|p^{-s}| = p^{-\sigma} < 1$ folgt mit der geometrischen Reihe

$$\left|(1 - p^{-s})^{-1} - 1\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} p^{-js}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p^{-j\sigma}.$$

Mit (2.6) folgt aufgrund von

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{j=1}^{\infty} p^{-j\sigma} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\sigma} < \zeta(\sigma) < \infty$$

die absolute Konvergenz des Produktes. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\{p_1, \ldots, p_r\} = \{p \in \mathbb{P};\ p \leqslant N\}$. Da man ein endliches Produkt absolut konvergenter Reihen beliebig umordnen darf, folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{p \leqslant N} (1 - p^{-s})^{-1} - \sum_{n=1}^{N} n^{-s}\right| \\
= &\left|\sum_{p \leqslant N} \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} - \sum_{n=1}^{N} n^{-s}\right| \\
= &\left|\sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} > N} \left(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}\right)^{-s}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}.
\end{aligned}$$

Weil die rechte Seite für $N \to \infty$ aufgrund der Konvergenz von $\zeta(\sigma)$ gegen 0 geht, folgt durch Limesbildung

$$\zeta(s) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} n^{-s} = \lim_{N \to \infty} \prod_{p \leqslant N} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}. \qquad \square$$

Bei (4.1) handelt es sich also um die analytische Version des Fundamentalsatzes der Arithmetik.

Wir betrachten wie in VI §5 als Spezialfall der Theta-Reihe

$$\vartheta(y) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi y n^2}, \quad y > 0,$$

und haben aufgrund der Theta-Transformationsformel VI(5.4)

$$\vartheta\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt{y}\cdot\vartheta(y) \quad \text{für } y > 0.$$

Bezeichnet $\Gamma(s)$ wieder die Gamma-Funktion, so erhalten wir

(4.2) Satz. *Sei*

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\zeta(s).$$

Dann besitzt $\xi(s)$ eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte s-Ebene. $\xi(s)$ ist holomorph bis auf einfache Pole bei $s = 1$ und $s = 0$ mit dem Residuum 1 und -1. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

mit einer Integraldarstellung

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty [\vartheta(y)-1]\cdot[y^{s/2}+y^{(1-s)/2}]\frac{dy}{y} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}. \tag{1}$$

Beweis. Für $v\in\mathbb{R}$, $v > 0$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$, gilt nach der Integraldarstellung der Gamma-Funktion in §3

$$\Gamma(s)\cdot v^{-s} = \frac{1}{v}\int_0^\infty (x/v)^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty y^{s-1}e^{-yv}dy.$$

Also hat man

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^\infty \Gamma(s/2)\cdot(\pi n^2)^{-s/2} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty y^{-1+s/2}e^{-\pi n^2 y}dy = \int_0^\infty y^{-1+s/2}\frac{1}{2}[\vartheta(y)-1]dy,$$

denn die Vertauschung von Integration und Summation ist wegen der absoluten Konvergenz erlaubt. Mit der Theta-Transformationsformel folgt nun

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \int_1^\infty y^{-1+s/2}\frac{1}{2}[\vartheta(y)-1]dy + \int_0^1 y^{-1+s/2}\frac{1}{2}[\vartheta(y)-1]dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{-1+s/2}\cdot[\vartheta(y)-1]dy + \frac{1}{2}\int_1^\infty v^{-(s/2)-1}\cdot[\vartheta(1/v)-1]dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{-1+s/2}\cdot[\vartheta(y)-1]dy + \frac{1}{2}\int_1^\infty v^{-(s/2)-1}\cdot[\sqrt{v}\cdot\vartheta(v)-1]dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{s/2}\cdot[\vartheta(y)-1] + y^{-s/2}\cdot[\sqrt{y}\cdot\vartheta(y)-1]\frac{dy}{y} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left[y^{s/2}+y^{(1-s)/2}\right]\cdot[\vartheta(y)-1]\frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{(1-s)/2} - y^{-s/2}\frac{dy}{y} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left[y^{s/2}+y^{(1-s)/2}\right]\cdot[\vartheta(y)-1]\frac{dy}{y} + \lim_{R\to\infty}\left(\frac{y^{(1-s)/2}}{1-s} - \frac{y^{-s/2}}{-s}\Big|_1^R\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left[y^{s/2}+y^{(1-s)/2}\right]\cdot[\vartheta(y)-1]\frac{dy}{y} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

für $\sigma > 1$, also (1). Andererseits gilt

$$0 \leqslant \vartheta(y) - 1 \leqslant C \cdot e^{-\pi y/2} \quad \text{für } y \geqslant 1.$$

Also konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty [y^{s/2} + y^{(1-s)/2}]\cdot[\vartheta(y)-1]\frac{dy}{y}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ und stellt eine ganze Funktion dar (vgl. III(5.3)). Damit erhält man die Aussage über die analytische Fortsetzung. Die Funktionalgleichung folgt aus (1), weil der Integrand invariant unter $s \mapsto 1-s$ ist. □

Aus (1) erhält man direkt

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) = \int_1^\infty [\vartheta(y)-1]\cdot y^{1/4}\cdot\cos(\ln y\cdot t/2)\,\frac{dy}{y} - \frac{4}{1+4t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daraus ergibt sich das

(4.3) Korollar. *Es gilt* $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \in \mathbb{R}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

Wir übersetzen den Satz (4.2) noch in eine Funktionalgleichung konkret für $\zeta(s)$.

(4.4) Korollar. *$\zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte s-Ebene. $\zeta(s)$ ist holomorph bis auf einen einfachen Pol bei $s=1$ und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\cdot\pi^{-s}\cdot\Gamma(s)\cdot\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\cdot\zeta(s).$$

Man erhält die speziellen Werte

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad \textit{für } n\in\mathbb{N}$$

und die trivialen Nullstellen $\zeta(-2n)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Beweis. Nach (4.2) gilt

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\cdot\frac{1}{\Gamma(s/2)}\cdot\xi(s).$$

Daraus folgt die meromorphe Fortsetzbarkeit mit den Eigenschaften der Gamma-Funktion in (3.4). Die Nullstelle von $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ an der Stelle $s=0$ hebt den Pol von $\xi(s)$ in $s=0$ weg. Also verbleibt nur ein einfacher Pol bei $s=1$ mit dem Residuum

$$\pi^{1/2}\cdot\frac{1}{\Gamma(1/2)}\cdot Res_{s=1}\xi(s) = 1.$$

Die Nullstellen von $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ in $s=-2n$, $n\in\mathbb{N}$, führen zu

$$\zeta(-2n) = 0, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Aus $\xi(1-s)=\xi(s)$ und den Eigenschaften der Gamma-Funktion in (3.7) und (3.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\zeta(1-s) &= \frac{\pi^{-s/2}\cdot\Gamma(s/2)}{\pi^{-(1-s)/2}\cdot\Gamma((1-s)/2)}\cdot\zeta(s) &&= \frac{\pi^{1/2-s}\cdot\Gamma(s/2)\cdot\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma((s+1)/2)\cdot\Gamma(1-(s+1)/2)}\cdot\zeta(s)\\
&= \frac{\pi^{1/2-s}\cdot 2^{1-s}\cdot\pi^{1/2}\cdot\Gamma(s)}{\pi/\sin(\pi(s+1)/2)}\cdot\zeta(s) &&= 2^{1-s}\cdot\pi^{-s}\cdot\Gamma(s)\cdot\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\cdot\zeta(s)
\end{aligned}$$

sowie

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n}\cdot\pi^{-2n}\cdot(2n-1)!\cdot(-1)^n\cdot\zeta(2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \; n\in\mathbb{N},$$

wenn man die speziellen Werte aus VI(4.5) verwendet. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\zeta(0) = \lim_{s\to 1}\zeta(1-s) &= \lim_{s\to 1}\left(2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{\cos(\pi s/2)}{s-1}\cdot(s-1)\zeta(s)\right)\\ &= 2^0\cdot\pi^{-1}\cdot 0!\cdot\frac{\pi}{2}(-\sin\frac{\pi}{2})\cdot 1 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ □

Man vermeidet Pole durch Multiplikation mit $s(1-s)$.

(4.5) Korollar. $\xi^*(s) := s\cdot(1-s)\cdot\pi^{-s/2}\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\zeta(s)$
ist eine ganze Funktion, die invariant bleibt unter $s\mapsto 1-s$.