LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
A. Henn

Aachen, den 4. April 2012

1. Übung zur Vorlesung Funktionentheorie II

Abgabe am 10.4. um 12 Uhr

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

a) $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z+n)^{-2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

b) $\frac{e^{2\pi i\tau}}{(1-e^{2\pi i\tau})^2} = \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau}$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$.

c) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r\tau}$ für alle $\tau \in \mathbb{H}, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$.

Hinweis: Verwenden Sie für a) die Partialbruchentwicklung des Cotangens. Verwenden Sie a) und b) für c).

(3+2+3 Punkte)

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Rekursionsformel für die Bernoulli-Zahlen:

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-8}$.

c) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

(1+2+2 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

a)
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s},$$

wobei

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{falls } n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k \text{ mit verschiedenen Primzahlen } p_1, \dots, p_k, \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

b)
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s},$$

wobei

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{falls } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \text{ und } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4

Für $\tau \in \mathbb{H}$ seien

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}, \\ \widetilde{\vartheta}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 \tau}, \\ \widetilde{\widetilde{\vartheta}}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+1/2)^2 \tau} \end{aligned}$$

und $f(\tau) := \left(\vartheta(\tau)\widetilde{\vartheta}(\tau)\widetilde{\widetilde{\vartheta}}(\tau)\right)^8$. Zeigen Sie:

a) $f(\tau + 1) = f(\tau)$ und $f(-1/\tau) = \tau^{12} f(\tau)$.

b) $\vartheta(1 - 1/\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\widetilde{\widetilde{\vartheta}}(\tau)$.

(4+1 Punkte)