LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
A. Henn

Aachen, den 3. April 2012

2. Übung zur Vorlesung Funktionentheorie II

Abgabe am 16.4. um 12 Uhr

Aufgabe 1

Seien a, b und c drei verschieden Punkte der Zahlkugel $\widehat{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Möbiustransformation φ_M mit der Eigenschaft

$$\varphi_M(a) = 0, \;\; \varphi_M(b) = 1, \;\; \varphi_M(c) = \infty.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie: Eine Möbiustransformation φ_M mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

führt genau dann $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in sich über, wenn die Koeffizienten a, b, c, d bis auf einen gemeinsamen Faktor reell sind.

b) Zeigen Sie: Durch die Abbildung

$$\psi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, \; z \mapsto i \cdot \frac{1-z}{1+z}$$

wird die Einheitskreislinie bijektiv auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abgebildet.

c) Zeigen Sie unter Verwendung von ψ: Alle Möbiustransformationen, die die Einheitskreislinie in sich überführen, können in der Form $\varphi(z) = (az + b)/(\overline{b}z + \overline{a})$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| \neq |b|$, geschrieben werden.

(3+1+2 Punkte)

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie: Eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation hat mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

b) Zeigen Sie mithilfe von Möbiustransformationen: Zu jeder Matrix $M \in GL(2, \mathbb{C})$ existiert eine Matrix $A \in GL(2, \mathbb{C})$, so dass AMA^{-1} eine Diagonalmatrix oder eine Dreiecksmatrix mit zwei gleichen Diagonalelementen ist.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass ∞ Fixpunkt von φ_M ist, und führen Sie den allgemeinen Fall darauf zurück.

(2+4 Punkte)