Beispiel. Für jedes $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ existiert ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum $\overline{V}$ mit einem dichten Unterraum $V \leq \overline{V}$, so dass V keine Orthonormalbasis für $\overline{V}$ enthält.

Beweis.

(1) Für einen beliebigen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einen abgeschlossenen, separablen Teilraum $K \leq \mathcal{H}$ und ein Orthonormalsystem $\beta \subset \mathcal{H}$ ist $\{h \in \beta \mid \mathrm{Proj}_K(h) \neq 0\}$ abzählbar, wobei $\mathrm{Proj}_K : \mathcal{H} \to K \leq \mathcal{H}$ die Orthogonalprojektion auf K bezeichnet.

Beweis. Da K separabel ist, existiert eine dichte Teilmenge $\{k_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset K$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach der Besselschen Ungleichung: $\infty > \|k_n\|^2 \geq \sum_{h \in \beta} |\langle k_n, h\rangle|^2$, das heißt $\Gamma_n := \{h \in \beta \mid \langle k_n, h\rangle \neq 0\}$ ist abzählbar. Damit ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar, so dass es reicht, $\{h \in \beta \mid \mathrm{Proj}_K(h) \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ zu zeigen. Sei dazu $h \in \beta$ mit $h \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$. Dann ist $h \in K^{\perp}$, denn angenommen, es existiert ein $k \in K$ mit $\langle k, h\rangle \neq 0$. Dann existiert eine Folge $(n_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $k_{n_l} \xrightarrow[l \to \infty]{} k$. Damit folgt $0 = \langle k_{n_l}, h\rangle \xrightarrow[l \to \infty]{} \langle k, h\rangle \neq 0$. Widerspruch. Also ist $h \in K^{\perp}$, das heißt $\mathrm{Proj}_K(h) = 0$. Damit ist $\{h \in \beta \mid \mathrm{Proj}_K(h) \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ bewiesen. □

(2) Sei $K := \ell^2(\mathbb{N})$ und $\beta_0 \subset K$ eine $\mathbb{K}$-Basis von $\ell^2(\mathbb{N})$ (existiert nach dem Zornschen Lemma). Dann ist β_0 überabzählbar.

Beweis. Angenommen, es wäre $\beta_0 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar. Es sei $V_n := \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Dann ist $V_n \leq K$ als endlich-dimensionaler Unterraum abgeschlossen und da $\beta_0 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein $\mathbb{K}$-Erzeugendensystem von K ist, gilt $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Da K ein vollständiger metrischer Raum ist, existiert nach dem Baireschen Kategoriensatz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $V_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$, das heißt, es existiert ein $x_0 \in V_{n_0}$ und ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset V_{n_0}$. Damit ist auch $B_r(x_0) - x_0 = B_r(0) \subset V_{n_0}$ und damit auch $B_{nr}(0) = nB_r(0) \subset V_{n_0}$, also schließlich $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{nr}(0) \subset V_{n_0}$, so dass folgt, dass $\ell^2(\mathbb{N}) = K = V_{n_0}$ endlich-dimensional ist. Widerspruch. □

(3) Sei $\mathcal{H} := \ell^2(\beta_0) \times K$ mit dem üblichen Skalarprodukt für kartesische Produkte von Hilberträumen. Für $\gamma \in \beta_0 \subset K$ sei

$$\delta_\gamma : \beta_0 \to \mathbb{K}, \varrho \mapsto \delta_{\varrho,\gamma} = \begin{cases} 1, & \varrho = \gamma, \\ 0, & \varrho \neq \gamma. \end{cases}$$

Dann ist $\delta_\gamma \in \ell^2(\beta_0)$ und $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \beta_0}$ ist eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\beta_0)$. Sei

$$\beta := \{(\delta_\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \beta_0\} \subset \ell^2(\beta_0) \times K = \mathcal{H}$$

und $V := \langle\beta\rangle \leq \mathcal{H}$. Dann gilt $\left\{h \in V \,\middle|\, \mathrm{Proj}_{\{0\} \times K}(h) = 0\right\} = \{0\}$.

Beweis. Es muss nur „$\subset$“ gezeigt werden, da $\mathrm{Proj}_{\{0\} \times K}(0) = 0$ klar ist. Sei also $x \in V = \langle\beta\rangle$ mit $\mathrm{Proj}_{\{0\} \times K}(h) = 0$. Dann gibt es paarweise verschiedene $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \beta$ und gewisse $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{i=1}^m c_i \psi_i$. Für $i \in \underline{m}$ existiert wegen $\psi_i \in \beta$ ein $\gamma_i \in \beta_0$ mit $\psi_i = (\delta_{\gamma_i}, \gamma_i)$.

Wegen $\mathrm{Proj}_{\{0\} \times K}(\psi_i) = (0, \gamma_i)$ folgt

$$0 = \mathrm{Proj}_{\{0\} \times K}(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot (0, \gamma_i) = \left(0, \sum_{i=1}^m c_i \cdot \gamma_i\right).$$

Da die $(\psi_i)_{i \in \underline{m}}$ paarweise verschieden sind, gilt das auch für die $(\gamma_i)_{i \in \underline{m}}$. Da $\gamma_i \in \beta_0$, $i \in \underline{m}$ gilt und $\beta_0 \subset K$ eine $\mathbb{K}$-Basis von K ist, folgt $c_i = 0$, $i \in \underline{m}$, also $x = 0$. □

(4) Es ist $\overline{V}$ nicht separabel.

Beweis. Angenommen, es sei $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{V}$ dicht. Betrachte die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{H} = \ell^2(\beta_0) \times K \to \ell^2(\beta_0), (x, y) \mapsto x.$$

Dann ist Φ linear und beschränkt und

$$\Phi\left(\overline{V}\right) \supset \Phi(V) \supset \Phi(\beta) = \Phi(\{(\delta_\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \beta_0\}) = \{\delta_\gamma \mid \gamma \in \beta_0\}$$

ist eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\beta_0)$, das heißt $\overline{\Phi\left(\overline{V}\right)} = \ell^2(\beta_0)$. Da $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \beta_0}$ eine überabzählbare Orthonormalbasis von $\ell^2(\beta_0)$ ist, ist $\ell^2(\beta_0)$ nicht separabel (denn für einen separablen Hilbertraum ist *jede* Orthonormalbasis abzählbar).

Es ist aber $\{\Phi(v_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Phi\left(\overline{V}\right)$ dicht, denn für $y = \Phi(v) \in \Phi\left(\overline{V}\right)$ existiert (da $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{V}$ dicht ist) eine Folge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $v_{n_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} v$, also $\Phi(v_{n_l}) \xrightarrow[l\to\infty]{} \Phi(v) = y$, also $y \in \overline{\{\Phi(v_n) \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Damit folgt aber auch, dass $\overline{\{\Phi(v_n) \mid n \in \mathbb{N}\}} \supset \overline{\Phi\left(\overline{V}\right)} = \ell^2(\beta_0)$ gilt, im Widerspruch zur Inseparabilität von $\ell^2(\beta_0)$. Also kann $\overline{V}$ nicht separabel sein. $\square$

(5) Es existiert keine Orthonormalbasis $\Delta \subset V$ von $\overline{V}$.

Beweis. Angenommen, $\Delta \subset V$ sei eine Orthonormalbasis von $\overline{V}$. Dann folgt nach Schritt 1 (beachte, dass $\{0\} \times K = \{0\} \times \ell^2(\mathbb{N}) \leq \mathcal{H}$ abgeschlossen und separabel ist):

$$\left\{h \in \Delta \,\middle|\, \mathrm{Proj}_{\{0\}\times K}(h) \neq 0\right\} \text{ ist abzählbar.}$$

Aber nach Schritt 3 folgt (wegen $\Delta \subset V \setminus \{0\}$): $\left\{h \in \Delta \,\middle|\, \mathrm{Proj}_{\{0\}\times K}(h) \neq 0\right\} = \Delta$, so dass Δ abzählbar sein muss. Da aber $\overline{V}$ nach Schritt 4 nicht separabel ist, kann Δ keine Orthonormalbasis von $\overline{V}$ sein. $\square$

$\square$