DAS SCHURSCHE LEMMA

BASIEREND AUF: SERGE LANG, REAL AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Es sei stets $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \{A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ linear und beschränkt}\}$.

Theorem 1. *Sei X kompakt, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $R := C(X, \mathbb{K})$ der Ring der stetigen Funktionen auf X (mit Werten in $\mathbb{K}$) und sei $J \leq R$ ein (bezüglich $\|\cdot\|_u$) abgeschlossenes Ideal von R. Für $f \in R$ mit*

$$f(x) = 0 \,\forall x \in Z(J) := \bigcap_{g \in J} g^{-1}(\{0\})$$

folgt dann schon $f \in J$.

Für $Z(J) = \emptyset$ folgt insbesondere $J = R = C(X, \mathbb{K})$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U := f^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset X$ offen, so dass $S := U^c \subset X$ abgeschlossen, also kompakt ist. Weiterhin gilt $U \supset f^{-1}(\{0\}) \supset Z(J)$. Für jedes

$$y \in S = U^c \subset (Z(J))^c = \bigcup_{g \in J} \left(g^{-1}(\{0\})\right)^c$$

existiert also ein $g_y \in J$ mit $g_y(y) \neq 0$. Dann ist $y \in V_y := g_y^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \subset X$ offen.

Da S kompakt ist mit $S \subset \bigcup_{y \in S} V_y$, existieren $y_1, \ldots, y_n \in S$ mit $S \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Dann ist

$$g := |g_{y_1}|^2 + \cdots + |g_{y_n}|^2 = \overline{g_{y_1}} \cdot g_{y_1} + \cdots + \overline{g_{y_n}} \cdot g_{y_n} \in J,$$

da J ein Ideal von R ist; es ist $g \geq 0$ und für $y \in S$ ist $y \in V_{y_i} = g_{y_i}^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ für ein $i \in \underline{n}$, also $g(y) \geq |g_{y_i}(y)|^2 > 0$. Da S kompakt und g stetig ist, folgt $a := \min_{y \in S} g(y) > 0$.

Dann ist $\frac{1}{1+ng} \in R = C(X, \mathbb{K})$ und damit $h_n := \frac{ng}{1+ng} \in J$, da J ein Ideal von R ist. Damit ist auch $f \cdot h_n \in J$. Weiterhin ist

$$|h_n(x)| = \frac{|ng(x)|}{|1 + ng(x)|} \overset{g \geq 0}{=} \frac{ng(x)}{1 + ng(x)} \leq 1.$$

Für $x \in U = f^{-1}(B_\varepsilon(0))$ gilt deshalb:

$$|f(x) - (f \cdot h_n)(x)| \leq |f(x)| + |f(x)| \cdot |h_n(x)| \leq 2|f(x)| < 2\varepsilon.$$

Für $x \in S = U^c$ gilt dagegen

$$|f(x) - (f \cdot h_n)(x)| = |f(x)| \cdot |1 - h_n(x)| \leq \|f\|_u \cdot \left| \frac{1 + ng(x) - ng(x)}{1 + ng(x)} \right| \overset{g \geq 0}{=} \|f\|_u \cdot \frac{1}{1 + ng(x)} \overset{g(x) \geq a}{\leq} \|f\|_u \cdot \frac{1}{1 + na}.$$

Damit folgt insgesamt:

$$\|f - f \cdot h_n\|_u \leq \max\left\{2\varepsilon, \frac{\|f\|_u}{1 + na}\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2\varepsilon.$$

Für n groß genug ist also $\|f - f \cdot h_n\|_u < 3\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt wegen $f \cdot h_n \in J$ schon $f \in \overline{J} = J$, da J abgeschlossen bezüglich $\|\cdot\|_u$ ist. $\square$

Lemma 2. *Sei $\emptyset \neq S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $C_S := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall B \in S : AB = BA\}$. Dann ist C_S eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Wenn für $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ also $AB = BA$ gilt, folgt schon $TB = BT$ für alle $T \in \overline{\mathbb{R}[A]}$.

Weiterhin ist $\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid A \text{ selbstadjungiert}\} \leq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein abgeschlossener $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis.

(1) Abgeschlossenheit: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_S^{\mathbb{N}}$ mit $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für beliebige $B \in S$ gilt dann: $AB = \lim_{n \to \infty} A_n B = \lim_{n \to \infty} BA_n = BA$, also ist auch $A \in C_S$.

(2) Additivität: Seien $A, \tilde{A} \in C_S$. Dann gilt für $B \in S$: $\left(A + \tilde{A}\right) B = AB + \tilde{A}B = BA + B\tilde{A} = B\left(A + \tilde{A}\right)$, das heißt, es ist auch $A + \tilde{A} \in C_S$.

(3) Multiplikativität: Seien $A, \tilde{A} \in C_S$. Dann gilt für beliebige $B \in S$:

$$\left(A\tilde{A}\right) B = A\left(\tilde{A}B\right) = A\left(B\tilde{A}\right) = (AB)\,\tilde{A} = (BA)\,\tilde{A} = B\left(A\tilde{A}\right),$$

das heißt, es ist auch $A\tilde{A} \in C_S$.

(4) Homogenität: Sei $A \in C_S$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann folgt für $B \in S$: $(cA)\,B = c\,(AB) = c\,(BA) = B\,(cA)$, das heißt, es ist auch $cA \in C_S$.

(5) Zusatz: Nach Voraussetzung folgt $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}, A \in C_{\{B\}}$. Da $C_{\{B\}}$ eine Algebra ist, folgt dann $\mathbb{R}\,[A] \subset C_{\{B\}}$ und da $C_{\{B\}}$ abgeschlossen ist auch $\overline{\mathbb{R}\,[A]} \subset C_{\{B\}}$, also $TB = BT$ für alle $T \in \overline{\mathbb{R}\,[A]}$.

(6) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^{\mathbb{N}}$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren mit $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig folgt dann:

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A_n y\rangle = \langle x, Ay\rangle\,,$$

so dass $A^* = A$ folgt. Weiterhin gilt für $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und $c \in \mathbb{R}$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle (cA + B)\,x, y\rangle = c\,\langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = c\,\langle x, Ay\rangle + \langle x, By\rangle \overset{c\in\mathbb{R}}{=} \langle x, (cA + B)\,y\rangle\,,$$

so dass $(cA + B)^* = cA + B$ folgt, so dass gezeigt ist, dass die Menge der selbstadjungierten Operatoren einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

□

Lemma 3. (1) *Sei $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ein komplexer Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear. Sei $C \geq 0$, so dass für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt: $|\langle Ax, x\rangle| \leq C\,\|x\|^2$. Dann folgt $|\langle Ax, y\rangle| + |\langle x, Ay\rangle| \leq 2C\,\|x\|\,\|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Falls A selbstadjungiert ist, folgt damit:*

$$2\,|\langle Ax, y\rangle| = |\langle Ax, y\rangle| + |\langle Ax, y\rangle| = |\langle Ax, y\rangle| + |\langle x, Ay\rangle| \leq 2C\,\|x\|\,\|y\|\,,$$

also insbesondere $\|Ax\|^2 = |\langle Ax, Ax\rangle| \leq C\,\|x\|\,\|Ax\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$, das heißt $\|A\|_\infty \leq C$.

(2) *Sei $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ein reeller Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear und selbstadjungiert. Sei $C \geq 0$ mit $|\langle Ax, x\rangle| \leq C\,\|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dann folgt $\|A\|_\infty \leq C$.*

Beweis.

(1) Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}
& 2C\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\
= \;& C\left(\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\right) \\
= \;& C\left(\langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle\right) \\
= \;& C\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) \\
\geq \;& |\langle A\,(x + y)\,, x + y\rangle| + |\langle A\,(x - y)\,, x - y\rangle| \\
= \;& |\langle A\,(x + y)\,, x + y\rangle| + |-\langle A\,(x - y)\,, x - y\rangle| \\
\geq \;& |\langle A\,(x + y)\,, x + y\rangle - \langle A\,(x - y)\,, x - y\rangle| \\
= \;& |\langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle - \langle Ay, y\rangle| \\
= \;& |2\,\langle Ax, y\rangle + 2\,\langle Ay, x\rangle| = 2\,|\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle|\,,
\end{aligned}$$

also $|\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle| \leq C\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

Seien nun $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann ist $\langle Ax, y\rangle = |\langle Ax, y\rangle| \cdot e^{i\alpha}$ und $\langle Ay, x\rangle = |\langle Ay, x\rangle| \cdot e^{i\beta}$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Definiere $\theta := \frac{\alpha-\beta}{2}$. Dann folgt, wenn man obige Abschätzung für $\hat{y} = y \cdot e^{i\theta}$ statt y anwendet:

$$\begin{aligned}
C\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = C\left(\|x\|^2 + \left\|e^{i\theta}y\right\|^2\right) \;&\geq\; \left|\langle Ax, e^{i\theta}y\rangle + \langle A\left(e^{i\theta}y\right), x\rangle\right| \\
&=\; \left|e^{-i\theta}\,\langle Ax, y\rangle + e^{i\theta}\,\langle Ay, x\rangle\right| \\
&=\; \left|e^{i(\alpha-\theta)}\,|\langle Ax, y\rangle| + e^{i(\theta+\beta)}\,|\langle Ay, x\rangle|\right| \\
&=\; \left|e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,|\langle Ax, y\rangle| + e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}\,|\langle Ay, x\rangle|\right| \\
&=\; ||\langle Ax, y\rangle| + |\langle Ay, x\rangle|| = |\langle Ax, y\rangle| + |\langle Ay, x\rangle|\,.
\end{aligned}$$

(2) Es gilt für $x, y \in \mathcal{H}$ (beachte, dass $\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle$ ist, da A selbstadjungiert ist und das Skalarprodukt im reellen Fall symmetrisch ist):

$$\begin{aligned} & \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ = \ & \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle - \langle Ay, y\rangle \\ = \ & \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle \\ = \ & 4 \cdot \langle Ax, y\rangle . \end{aligned}$$

Damit folgt für $\|x\|, \|y\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |\langle Ax, y\rangle| &= \frac{1}{4} \cdot |\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y, x-y)\rangle| \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot (|\langle A(x+y), x+y\rangle| + |\langle A(x-y), x-y\rangle|) \\ &\leq \frac{C}{4} \cdot \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right). \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \leq 4, \end{aligned}$$

also

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq C.$$

Damit gibt es für $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| \leq 1$ zwei Fälle: Für $Ax = 0$ ist trivialerweise $\|Ax\| \leq C$. Für $Ax \neq 0$ folgt mit $y := \frac{Ax}{\|Ax\|}$:

$$\|Ax\| = \left| \left\langle Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\rangle \right| = |\langle Ax, y\rangle| \leq C.$$

Also folgt in jedem Fall die Behauptung.

□

Definition 4. Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert heißt A positiv (geschrieben $A \geq 0$ oder $0 \leq A$), falls $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt. Für $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert schreiben wir $A \geq B$ (bzw. $B \leq A$), falls $A - B \geq 0$ gilt.

Bemerkung. Beachte, dass für selbstadjungierte $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ stets gilt: $\overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle$, das heißt $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Lemma 5. *Die Relation $\leq$ definiert eine Ordnung auf der Menge der linearen, beschränkten, selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}$, das heißt, es gilt für alle selbstadjungierten, $A, B, C, A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:*

$$\begin{aligned} A \leq B \leq C &\Rightarrow A \leq C \\ A \leq B \leq A &\Rightarrow A = B \\ A_1 \geq B_1 \wedge A_2 \geq B_2 &\Rightarrow A_1 + A_2 \geq B_1 + B_2 \\ c \geq 0, A \geq B &\Rightarrow cA \geq cB \\ A \geq A & \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $-\|A\|_\infty \cdot id_{\mathcal{H}} \leq A \leq \|A\|_\infty \cdot id_{\mathcal{H}}$ und für $C \geq 0$ mit $-C \cdot id_{\mathcal{H}} \leq A \leq C \cdot id_{\mathcal{H}}$ folgt $\|A\|_\infty \leq C$.

Beweis.

(1) Sei $A \leq B \leq C$. Dann folgt für $x \in \mathcal{H}$:

$$\langle (C-A)x, x\rangle = \langle ((C-B) + (B-A))x, x\rangle = \langle (C-B)x, x\rangle + \langle (B-A)x, x\rangle \geq 0,$$

also $C \geq A$.

(2) Sei $A \leq B \leq A$. Dann folgt für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$0 \leq \langle (B-A)x, x\rangle = -\langle (A-B)x, x\rangle \leq 0,$$

also $\langle (A-B)x, x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Nach Lemma 3 folgt (da $A - B$ selbstadjungiert ist) $\|A - B\| = 0$, also $A = B$.

(3) Sei $A_1 \geq B_1$ und $A_2 \geq B_2$. Dann folgt für alle $x \in \mathcal{H}$:
$$\left\langle \left((A_1 + A_2) - (B_1 + B_2) \right) x, x \right\rangle = \left\langle (A_1 - B_1)\, x, x \right\rangle + \left\langle (A_2 - B_2)\, x, x \right\rangle \geq 0,$$
also $A_1 + A_2 \geq B_1 + B_2$.

(4) Sei $c \geq 0$ und $A \geq B$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:
$$\left\langle (cA - cB)\, x, x \right\rangle = c \left\langle (A - B)\, x, x \right\rangle \geq 0,$$
also $cA \geq cB$.

(5) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt: $\langle (A - A)\, x, x \rangle = 0 \geq 0$, also $A \geq A$.

(6) Für $x \in \mathcal{H}$ gilt:
$$\begin{aligned}
\left\langle \left(A - \left(- \|A\|_\infty \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\right)\right) x, x \right\rangle &= \langle Ax, x \rangle + \|A\|_\infty \cdot \langle x, x \rangle \geq - |\langle Ax, x \rangle| + \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 \\
&\overset{\text{CSU}}{\geq} - \|Ax\| \cdot \|x\| + \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 \geq - \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 + \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 = 0, \\
\left\langle \left(\|A\|_\infty \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - A\right) x, x \right\rangle &= \|A\|_\infty \cdot \langle x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \geq \|A\|_\infty \|x\|^2 - |\langle Ax, x \rangle| \\
&\overset{\text{CSU}}{\geq} \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 - \|Ax\| \cdot \|x\| \geq \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 - \|A\|_\infty \cdot \|x\|^2 = 0,
\end{aligned}$$
also $- \|A\|_\infty \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leq A \leq \|A\|_\infty \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

(7) Aus $-C \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leq A \leq C \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ folgt für $x \in \mathcal{H}$ beliebig:
$$-C \cdot \|x\|^2 = \left\langle \left(-C \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\right)(x), x \right\rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \left\langle \left(C \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}\right)(x), x \right\rangle = C \cdot \|x\|^2,$$
das heißt $|\langle Ax, x \rangle| \leq C \cdot \|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$, so das nach Lemma 3 schon $\|A\|_\infty \leq C$ folgt.

□

Lemma 6. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $(a_{0,i})_{i \in \underline{n}}, (a_{1,i})_{i \in \underline{n}} \in R^n$ für einen Ring R gilt:*
$$\prod_{i=1}^{n} (a_{0,i} + a_{1,i}) = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma_i, i}.$$

Beweis. Beweis mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt: $\prod_{i=1}^{1} (a_{0,i} + a_{1,i}) = a_{0,1} + a_{1,1} = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^1} \prod_{i=1}^{1} a_{\sigma_i, i}$.
Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es gilt:
$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} (a_{0,i} + a_{1,i}) &= \left(\prod_{i=1}^{n} (a_{0,i} + a_{1,i}) \right) \cdot (a_{0,n+1} + a_{1,n+1}) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \left(\sum_{\sigma \in \{0,1\}^n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma_i, i} \right) \cdot (a_{0,n+1} + a_{1,n+1}) \\
&= \sum_{\sigma \in \{0,1\}^n} \left[\left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma_i, i} \right) \cdot a_{0,n+1} \right] + \sum_{\sigma \in \{0,1\}^n} \left[\left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma_i, i} \right) \cdot a_{1,n+1} \right] \\
&= \sum_{\sigma \in \{0,1\}^n \times \{0\}} \prod_{i=1}^{n+1} a_{\sigma_i, i} + \sum_{\sigma \in \{0,1\}^n \times \{1\}} \prod_{i=1}^{n+1} a_{\sigma_i, i} \\
&\overset{\{0,1\}^{n+1} = (\{0,1\}^n \times \{0\}) \mathbin{\dot\cup} (\{0,1\}^n \times \{1\})}{=} \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} a_{\sigma_i, i}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 7. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und $p \in \mathbb{R}[x]$ eine Polynomfunktion mit $p(t) \geq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Dann existieren $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ und Polynome $(P_i)_{i \in \underline{l}}, (Q_i)_{i \in \underline{m}}, (R_i)_{i \in \underline{n}} \in \mathbb{R}[x]$ und ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit:*
$$p(t) = c \cdot \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{l} (P_i(t))^2}_{(\star)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (t - \alpha)(Q_i(t))^2}_{(\star\star)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\beta - t)(R_i(t))^2}_{(\star\star\star)} \right]$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis.

(1) Falls $\deg(p) \in \{-\infty, 0\}$ ist, ist $p \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Damit folgt die Behauptung mit $l = 1$, $m = n = 0$ und $P_1 = 1$ und $c \in \mathbb{R}_+$, da $c = p(\alpha) \geq 0$ gilt.

(2) Sei $k := \deg(p) \geq 1$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert eine Nullstellenmenge $\Delta_p \subset \mathbb{C}$ und eine Vielfachheiten-Abbildung $m_p : \Delta_p \to \mathbb{N}$, sowie ein führender Koeffizient $c_p \in \mathbb{R}$ mit

$$p(t) = c_p \cdot \prod_{\gamma \in \Delta_p} (t-\gamma)^{m_p(\gamma)}.$$

Sei $N_p := \Delta_p \cap \mathbb{R}$ und $M_p := \{\gamma \in \Delta_p \mid \mathrm{Im}(\gamma) > 0\}$, sowie $\tilde{M}_p := \{\gamma \in \Delta_p \mid \mathrm{Im}(\gamma) < 0\}$.

(3) Es gilt $\overline{M_p} = \tilde{M}_p$ und für $\gamma \in M_p$ gilt $m_p(\gamma) = m_p(\overline{\gamma})$.

Beweis. „$\subset$“: Sei $\gamma \in M_p$. Dann ist $\mathrm{Im}(\overline{\gamma}) = -\mathrm{Im}(\gamma) < 0$ und (beachte, dass konjugieren ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist und dass $\overline{p}$ das Polynom p mit konjugierten Koeffizienten bezeichnet, also wegen $p \in \mathbb{R}[x]$ schon $\overline{p} = p$ gilt): $p(\overline{\gamma}) = \overline{p}(\overline{\gamma}) = \overline{p(\gamma)} = \overline{0} = 0$, das heißt $\overline{\gamma} \in \tilde{M}_p$.

„$\supset$“: Sei $\gamma \in \tilde{M}_p$. Dann ist $\mathrm{Im}(\overline{\gamma}) = -\mathrm{Im}(\gamma) > 0$ und wie oben folgt $p(\overline{\gamma}) = 0$, das heißt, es ist $\overline{\gamma} \in M_p$ und damit $\gamma = \overline{\overline{\gamma}} \in \overline{M_p}$.

Nun noch der Beweis von $m_p(\gamma) = m_p(\overline{\gamma})$ mittels vollständiger Induktion nach $\deg(p) \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang ($\deg(p) = 1$): Für $\deg(p) = 1$ ist die Behauptung klar, denn dann ist $p = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, das heißt $\Delta_p = \left\{-\frac{b}{a}\right\} \subset \mathbb{R}$, also $M_p = \emptyset$, so dass die Aussage trivialerweise erfüllt ist.
Induktionsschritt ($\deg(p) \to \deg(p)+1$): Es gelte nun die Behauptung für alle $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p) \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei dann $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p) = n+1$. Falls $M_p = \emptyset$ ist, ist die Aussage wieder trivial. Sei also $M_p \neq \emptyset$ und $\gamma \in M_p$ beliebig. Wie oben gesehen ist dann $\overline{\gamma}$ auch eine Nullstelle von p. Damit gilt

$$\begin{aligned} p(t) &= \underbrace{\left(c_p \cdot \left(\prod_{\beta \in \Delta_p \setminus \{\gamma, \overline{\gamma}\}} (t-\beta)^{m_p(\beta)}\right) \cdot (t-\gamma)^{m_p(\gamma)-1} \cdot (t-\overline{\gamma})^{m_p(\overline{\gamma})-1}\right)}_{=:\tilde{p}(t)} \cdot (t-\gamma) \cdot (t-\overline{\gamma}) \\ &= \tilde{p}(t) \cdot \left(t^2 - 2\mathrm{Re}(\gamma)\, t + |\gamma|^2\right), \end{aligned}$$

so dass $\tilde{p}(t) \in \mathbb{C}[t]$ ist mit $\tilde{p}(t) = \frac{p(t)}{(t^2 - 2\mathrm{Re}(\gamma)t + |\gamma|^2)} \in \mathbb{R}$ für $t \notin \{\gamma, \overline{\gamma}\}$. Es ist aber $\tilde{p}(t) = \sum_{i=0}^{\deg(\tilde{p})} \frac{\tilde{p}^{(i)}(0)}{i!} t^i$.
Wegen $\tilde{p}(t) \in \mathbb{R}$ für $t \notin \{\gamma, \overline{\gamma}\}$ folgt dann aber schon $\tilde{p}^{(i)}(0) \in \mathbb{R}$ für alle $i = 0, \ldots, \deg(\tilde{p})$, das heißt $\tilde{p}(t) \in \mathbb{R}[t]$, so dass nach Induktionsvoraussetzung schon $m_p(\gamma) - 1 = m_{\tilde{p}}(\gamma) = m_{\tilde{p}}(\overline{\gamma}) = m_p(\overline{\gamma}) - 1$ folgt.

□

(4) Also hat p wegen

$$(t-\gamma)(t-\overline{\gamma}) = t^2 - 2\mathrm{Re}(\gamma)\, t + |\gamma|^2 = (t - \mathrm{Re}(\gamma))^2 + |\gamma|^2 - (\mathrm{Re}(\gamma))^2 = (t - \mathrm{Re}(\gamma))^2 + (\mathrm{Im}(\gamma))^2$$

die Form

$$\begin{aligned} p(t) &= c_p \cdot \prod_{\gamma \in N_p} (t-\gamma)^{m_p(\gamma)} \cdot \prod_{\gamma \in M_p} ((t-\gamma)(t-\overline{\gamma}))^{m_p(\gamma)} \\ &= c_p \cdot \prod_{\gamma \in N_p} (t-\gamma)^{m_p(\gamma)} \cdot \prod_{\gamma \in M_p} \left[(t - \mathrm{Re}(\gamma))^2 + (\mathrm{Im}(\gamma))^2\right]^{m_p(\gamma)}. \end{aligned}$$

(5) Für $\gamma \in N_p \cap (\alpha, \beta)$ ist $m(\gamma)$ gerade, denn ansonsten wäre $p(t) = (t-\gamma)^{m(\gamma)} \cdot r(t)$ mit $r \in \mathbb{R}[x]$ und $r(\gamma) \neq 0$. Dann gibt es zwei Fälle:

(a) Für $r(\gamma) > 0$ wäre (aus Stetigkeitsgründen) auch $r(\gamma - \varepsilon) > 0$ für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Für $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \gamma - \alpha\}$ wäre dann aber schon $\gamma - \varepsilon \in (\alpha, \beta)$, also (wegen $p|_{[\alpha,\beta]} \geq 0$):

$$0 \leq p(\gamma - \varepsilon) = \underbrace{((\gamma - \varepsilon) - \gamma)^{m(\gamma)}}_{<0} \cdot \underbrace{r(\gamma - \varepsilon)}_{>0} < 0.$$

Widerspruch.

(b) Für $r(\gamma) < 0$ wäre (aus Stetigkeitsgründen) auch $r(\gamma+\varepsilon) > 0$ für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Für $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon, \beta - \gamma\}$ wäre dann aber schon $\gamma + \varepsilon \in (\alpha, \beta)$, also (wegen $p|_{[\alpha,\beta]} \geq 0$):

$$0 \leq p(\gamma+\varepsilon) = \underbrace{((\gamma+\varepsilon)-\gamma)^{m(\gamma)}}_{>0} \cdot \underbrace{r(\gamma+\varepsilon)}_{<0} < 0.$$

Widerspruch.

(6) Es folgt (mit $\gamma_r := \mathrm{Re}(\gamma)$ und $\gamma_i := \mathrm{Im}(\gamma)$):

$$p(t) = c_p \cdot \underbrace{\left(\prod_{\gamma \in N_p} (t-\gamma)^{\left\lfloor \frac{m_p(\gamma)}{2} \right\rfloor} \cdot \prod_{\gamma \in M_p} \left((t-\gamma_r)^2 + (\gamma_i)^2 \right)^{\left\lfloor \frac{m_p(\gamma)}{2} \right\rfloor} \right)^2}_{=:(Q(t))^2, Q(t) \in \mathbb{R}[t]} \cdot \prod_{\substack{\gamma \in N_p \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} (t-\gamma) \cdot \prod_{\substack{\gamma \in M_p \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} \left((t-\gamma_r)^2 + (\gamma_i)^2 \right).$$

(7) Nach Schritt 5 gilt

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\gamma \in N_p \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} (t-\gamma) &= \prod_{\substack{\gamma \in N_p, \gamma \leq \alpha \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} (t-\gamma) \cdot \prod_{\substack{\gamma \in N_p, \gamma \geq \beta \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} (t-\gamma) \\ &= \prod_{\substack{\gamma \in N_p, \gamma \leq \alpha \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} \left[(t-\alpha) + \sqrt{(\alpha-\gamma)}^2 \right] \cdot \prod_{\substack{\gamma \in N_p, \gamma \geq \beta \\ m_p(\gamma) \equiv_2 1}} (-1) \cdot \left[(\beta - t) + \sqrt{(\gamma-\beta)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass p insgesamt von der Form

$$p(t) = \tilde{c} \cdot (Q(t))^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[(t-\alpha) + a_i^2 \right] \cdot \prod_{j=1}^{m} \left[(\beta - t) + b_j^2 \right] \cdot \prod_{k=1}^{q} \left[(t-c_k)^2 + d_k^2 \right]$$

für geeignete $n, m, q \in \mathbb{N}_0$ und $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, $Q(t) \in \mathbb{R}[t]$, sowie $a_i, b_j, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ für $i \in \underline{n}$, $j \in \underline{m}$ und $k \in \underline{q}$ ist.

Beachte, dass wegen $\alpha < \beta$, $p \neq 0$ und $p|_{[\alpha,\beta]}$ nach dem Identitätssatz ein $x_0 \in (\alpha, \beta)$ mit $p(t) > 0$ existiert. Damit folgt

$$0 < \tilde{c} \cdot \underbrace{(Q(x_0))^2}_{\geq 0} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[\underbrace{(x_0 - \alpha)}_{>0} + a_i^2 \right] \cdot \prod_{j=1}^{m} \left[\underbrace{(\beta - x_0)}_{>0} + b_j^2 \right] \cdot \prod_{k=1}^{q} \left[\underbrace{(x_0 - c_k)^2}_{\geq 0} + d_k^2 \right],$$

so dass $\tilde{c} > 0$ folgt.

(8) Sei nun

$$\begin{aligned} \varphi_{0,i} &:= t - \alpha & &\text{und} & \varphi_{1,i} &:= a_i^2 & &\text{für } i \in \underline{n}, \\ \psi_{0,j} &:= \beta - t & &\text{und} & \psi_{1,j} &:= b_j^2 & &\text{für } j \in \underline{m}, \\ \eta_{0,k} &:= (t - c_k)^2 & &\text{und} & \eta_{1,k} &:= d_k^2 & &\text{für } k \in \underline{q}. \end{aligned}$$

Beachte, dass ausschließlich $\varphi_{0,i}$ und $\psi_{0,j}$ keine(!) quadratischen Polynome sind.

Dann folgt (in dem man mittels Lemma 6 distributiv ausmultipliziert):

$$p(t) = \tilde{c} \cdot \sum_{(\sigma,\gamma,\delta) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^m \times \{0,1\}^q} \underbrace{(Q(t))^2 \cdot \varphi_{\sigma_1,1} \cdots \varphi_{\sigma_n,n} \cdot \psi_{\gamma_1,1} \cdots \psi_{\gamma_m,m} \cdot \eta_{\delta_1,1} \cdots \eta_{\delta_q,q}}_{=:P_{\sigma,\gamma,\delta}}.$$

Nun gibt es für alle $(\sigma,\gamma,\delta) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^m \times \{0,1\}^q$ vier Fälle:

(a) $\sigma_i = 0$ für gerade viele $i \in \underline{n}$ und $\psi_j = 0$ für gerade viele $j \in \underline{m}$. Dann ist $P_{\sigma,\gamma,\delta}$ ein quadratisches Polynom, also ist dieser Summand vom Typ $(\star)$ in der Behauptung.

(b) $\sigma_i = 0$ für gerade viele $i \in \underline{n}$ und $\psi_j = 0$ für ungerade viele $j \in \underline{m}$. Dann ist $P_{\sigma,\gamma,\delta}$ von der Form $(\beta - t) \cdot (S(t))^2$ für ein geeignetes $S \in \mathbb{R}[x]$, das heißt, dieser Summand ist vom Typ $(\star\star\star)$ in der Behauptung.

(c) $\sigma_i = 0$ für ungerade viele $i \in \underline{n}$ und $\psi_j = 0$ für gerade viele $j \in \underline{m}$. Dann ist $P_{\sigma,\gamma,\delta}$ von der Form $(t - \alpha) \cdot (S(t))^2$ für ein geeignetes $S \in \mathbb{R}[x]$, das heißt, dieser Summand ist vom Typ $(\star\star)$ in der Behauptung.

(d) $\sigma_i = 0$ für ungerade viele $i \in \underline{n}$ und $\psi_j = 0$ für ungerade viele $j \in \underline{m}$. Dann ist $P_{\sigma,\gamma,\delta}$ von der Form

$$(S(t))^2 \cdot (t-\alpha) \cdot (\beta - t)$$

für ein geeignetes $S \in \mathbb{R}[x]$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} (t-\alpha)(\beta-t) &\overset{!}{=} \frac{(t-\alpha)^2(\beta-t) + (t-\alpha)(\beta-t)^2}{\beta-\alpha} \\ \Leftarrow \quad 1 &= \frac{(t-\alpha)+(\beta-t)}{\beta-\alpha}, \end{aligned}$$

das heißt, es ist $(S(t))^2 \cdot (t-\alpha) \cdot (\beta-t) = (\beta-t) \cdot \left(\frac{S(t)}{\sqrt{\beta-\alpha}} \cdot (t-\alpha)\right)^2 + (t-\alpha) \cdot \left(\frac{S(t)}{\sqrt{\beta-\alpha}} \cdot (\beta-t)\right)^2$, also eine Summe vom Typ $(\star\star)$ und vom Typ $(\star\star\star)$.

Insgesamt ist damit gezeigt, dass $p(t)$ als $\tilde{c}$-Vielfaches einer Summe von Summanden der Typen $(\star), (\star\star)$ und $(\star\star\star)$ geschrieben werden kann, so dass die Behauptung folgt.

□

Lemma 8. *Seien $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, mit $\alpha \cdot id_{\mathcal{H}} \leq A \leq \beta \cdot id_{\mathcal{H}}$. Dann gilt:*

(1) *Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $p(t) \geq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Dann ist $p(A)$ ein positiver Operator.*
(2) *Seien $p, q \in \mathbb{R}[x]$ mit $p(t) \leq q(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Dann ist $p(A) \leq q(A)$.*
(3) *Es gilt $\|p(A)\| \leq \|p\|_{L^\infty([\alpha,\beta])}$.*
(4) *Weil $\mathbb{R}[x] \subset C([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht ist, besitzt der nach Schritt 3 beschränkte Operator $\left(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_{L^\infty([\alpha,\beta])}\right) \to \overline{\mathbb{R}[A]}, p \mapsto p(A)$ eine eindeutige, lineare stetige Fortsetzung, bezeichnet mit $C([\alpha,\beta], \mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}[A]}, f \mapsto f(A)$. Diese ist ein Algebrenhomomorphismus.*
   Nach Lemma 2 ist die Menge der selbstadjungierten Operatoren ein abgeschlossener $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so dass insbesondere folgt, dass $\overline{\mathbb{R}[A]}$ eine Menge selbstadjungierter Operatoren ist.
(5) *Für $f \in C([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ folgt $f(A) \geq 0$.*

Beweis.

(1) Nach Lemma 7 gilt $p(t) = c \cdot \left[\sum_{i=1}^{l} (P_i(t))^2 + \sum_{i=1}^{m} (t-\alpha)(Q_i(t))^2 + \sum_{i=1}^{n} (\beta-t)(R_i(t))^2\right]$ für ein $c \geq 0$, geeignete $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ und Polynome $(P_i)_{i \in \underline{l}}, (Q_i)_{i \in \underline{m}}, (R_i)_{i \in \underline{n}} \in \mathbb{R}[x]$. Damit folgt für $x \in \mathcal{H}$ beliebig, da mit A auch $S(A)$ für alle $S \in \mathbb{R}[x]$ selbstadjungiert ist:

$$\begin{aligned} & \langle p(A)(x), x\rangle \\ = \ & c\left[\sum_{i=1}^{l} \langle (P_i(A) \circ P_i(A)) x, x\rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle (Q_i(A) \circ (A - \alpha \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ Q_i(A)) x, x\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle (R_i(A) \circ (\beta \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - A) \circ R_i(A)) x, x\rangle\right] \\ = \ & c\left[\sum_{i=1}^{l} \underbrace{\langle P_i(A)x, P_i(A)x\rangle}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\langle (A - \alpha\mathrm{id}_{\mathcal{H}})[Q_i(A)x], Q_i(A)x\rangle}_{\geq 0, \text{ da } A \geq \alpha \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle (\beta\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - A)[R_i(A)x], R_i(A)x\rangle}_{\geq 0, \text{ da } \beta \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \geq A}\right] \geq 0. \end{aligned}$$

(2) Es gilt $(q-p)(t) \geq 0$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$, also nach Teil 1 schon $q(A) - p(A) = (q-p)(A) \geq 0$, das heißt $q(A) \geq p(A)$.
(3) Es ist $-\|p\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \leq p(t) \leq \|p\|_{L^\infty([\alpha,\beta])}$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$. Damit folgt nach Teil 2 die Ungleichung $-\|p\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leq p(A) \leq \|p\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, so dass nach Lemma 5 schon $\|p(A)\|_\infty \leq \|p\|_{L^\infty([\alpha,\beta])}$ folgt.
(4) Für $f, g \in C([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[x]^{\mathbb{N}}$ mit $\|f - f_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])}, \|g - g_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt auch

$$\begin{aligned} \|fg - f_n g_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} &\leq \|fg - f_n g\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} + \|f_n g - f_n g_n\|_{L^\infty([a,b])} \\ &\leq \|f - f_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \cdot \|g\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} + \|f_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \cdot \|g - g_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

so dass folgt: $(fg)(A) = \lim_{n\to\infty} (f_n g_n)(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) \circ g_n(A) = f(A) \circ g(A)$, das heißt, $f \mapsto f(A)$ ist ein Algebrenhomomorphismus.

(5) Angenommen, es ist nicht $f(A) \geq 0$. Dann existiert ein $x \in \mathcal{H}$ mit $\langle f(A)x, x\rangle < 0$. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[x])^{\mathbb{N}}$ mit $\|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Definiere dann $\tilde{p_n} := p_n + \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])}$. Für $x \in [\alpha, \beta]$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\tilde{p_n}(x) &= p_n(x) + \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} = f(x) + (p_n(x) - f(x)) + \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \\ &\geq f(x) - |p_n(x) - f(x)| + \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \geq f(x) - \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} + \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \\ &= f(x) \geq 0\end{aligned}$$

und

$$\|f - \tilde{p_n}\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \leq \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} + \left\| \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \right\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} = 2 \cdot \|f - p_n\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Also folgt $\|f(A) - \tilde{p_n}(A)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Wegen $\tilde{p_n}|_{[\alpha,\beta]} \geq 0$ folgt damit:

$$0 > \langle f(A)x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \tilde{p_n}(A)x, x\rangle \geq 0,$$

Widerspruch. Also ist $f(A) \geq 0$.

□

Lemma 9. *Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert mit $A \geq 0$. Dann existiert ein $B \in \overline{\mathbb{R}[A]}$ mit $B^2 = A$. Für $A, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert mit $A \geq 0$ und $C \geq 0$ und $AC = CA$ ist auch $AC \geq 0$.*

Beweis.

(1) Wegen $A \geq 0$ ist $0 \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leq A \leq \|A\| \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leq (\|A\| + 1) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, so dass Lemma 8 mit $\alpha := 0 < \|A\| + 1 =: \beta$ anwendbar ist. Dann ist $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ stetig. Da $g \mapsto g(A)$ ein Algebrenhomomorphismus ist, folgt für $B := f(A) \in \overline{\mathbb{R}[A]}$ schon $A = (x \mapsto x)(A) = (f \cdot f)(A) = f(A) \cdot f(A) = B \cdot B = B^2$.

(2) Sei $A = B^2$ für ein $B \in \overline{\mathbb{R}[A]}$ (existiert nach Schritt 1). Nach Lemma 2 gilt $BC = CB$. Damit folgt für $x \in \mathcal{H}$ beliebig:

$$\langle ACx, x\rangle = \langle BBCx, x\rangle = \langle BCx, Bx\rangle = \langle C(Bx), Bx\rangle \geq 0,$$

da $C \geq 0$ gilt. Also ist auch $AC \geq 0$.

□

Definition 10. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und $\alpha \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \leq A \leq \beta \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Dann ist $J := \{f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \mid f(A) = 0\} \leq C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ ein abgeschlossenes Ideal von $C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, da $f \mapsto f(A)$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus ist. Wir definieren dann das Spektrum von A als

$$\sigma(A) := Z(J) = \bigcap_{f\in J} f^{-1}(\{0\}).$$

Beachte, dass $\sigma(A) \subset [\alpha, \beta]$ abgeschlossen, also kompakt ist. Es wird sich später zeigen, dass das Spektrum von A unabhängig von der Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist.

Theorem 11. *(Spektralsatz)*
Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und $\alpha \cdot id_{\mathcal{H}} \leq A \leq \beta \cdot id_{\mathcal{H}}$. Definiere dann

$$\Gamma : C(\sigma(A), \mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}[A]}, f \mapsto f(A) := \tilde{f}(A) \text{ für ein } \tilde{f} \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \text{ mit } \tilde{f}|_{\sigma(A)} = f.$$

Dann ist Γ wohldefiniert und ein Algebrenisomorphismus, das heißt ein bijektiver Algebrenhomomorphismus mit $\|\Gamma(f)\| = \|f\|_{\sigma(A)}$ für $\|f\|_{\sigma(A)} := \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)|$.
Weiterhin gilt für $f \in C(\sigma(A), \mathbb{R})$ genau dann $f \geq 0$, wenn $f(A) \geq 0$ gilt.
Insbesondere gilt $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Beweis.

(1) Angenommen, es wäre $\sigma(A) = \emptyset$. Nach Satz 1 folgt dann schon $J = C([\alpha, \beta])$, insbesondere ist also $(x \mapsto 1) \in J$, das heißt $0 = (x \mapsto 1)(A) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Widerspruch, da $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ist.

(2) Wohldefiniertheit und Beschränktheit: Zu $f \in C(\sigma(A), \mathbb{R})$ existiert nach dem Fortsetzungssatz von Tietze ein $\tilde{f} \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ mit $\tilde{f}|_{\sigma(A)} = f$ und $\left\|\tilde{f}\right\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} = \|f\|_{\sigma(A)}$.

Damit folgt $\|f(A)\| = \left\|\tilde{f}(A)\right\| \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} = \|f\|_{\sigma(A)}$, also die Beschränktheit von Γ, wenn die Wohldefiniertheit gezeigt ist. Seien also $\tilde{f}, \hat{f} \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ mit $\tilde{f}|_{\sigma(A)} = f = \hat{f}|_{\sigma(A)}$. Dann gilt

$\left(\tilde{f}-\hat{f}\right)(x)=0$ für alle $x\in Z(J)$, so dass nach Satz 1 schon $\tilde{f}-\hat{f}\in J=\{g\in C([\alpha,\beta])\mid g(A)=0\}$ folgt, das heißt $\tilde{f}(A)=\left(\tilde{f}-\hat{f}\right)(A)+\hat{f}(A)=\hat{f}(A)$, womit die Wohldefiniertheit von Γ gezeigt ist.

(3) Zeige für $f\in C(\sigma(A),\mathbb{R})$, dass $f\geq 0$ genau dann gilt, wenn $f(A)\geq 0$ ist.

Für $f\geq 0$ existiert nach dem Fortsetzungssatz von Tietze ein $\tilde{f}\in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}|_{\sigma(A)}=f$. Dann ist auch $\hat{f}:=\max\left\{0,\tilde{f}\right\}\in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ mit $\hat{f}|_{\sigma(A)}=f$ und $\hat{f}\geq 0$, so dass nach Lemma 8 schon $f(A)=\hat{f}(A)\geq 0$ folgt.

Sei nun $f(A)\geq 0$. Sei $\tilde{f}\in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}|_{\sigma(A)}=f$. Angenommen, es ist nicht $f\geq 0$. Dann existiert ein $x_0\in\sigma(A)$ mit $\tilde{f}(x_0)=f(x_0)<0$. Da $\tilde{f}$ stetig ist, existiert dann ein $\varepsilon>0$ mit $\tilde{f}(x)<0$ für alle $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\cap[\alpha,\beta]$. Betrachte nun die stetige Funktion

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto\begin{cases}0, & x\leq x_0-\varepsilon,\\ \frac{1}{\varepsilon}\cdot(x-x_0+\varepsilon), & x_0-\varepsilon\leq x\leq x_0,\\ \frac{1}{\varepsilon}\cdot(x_0+\varepsilon-x), & x_0\leq x\leq x_0+\varepsilon,\\ 0, & x\geq x_0+\varepsilon.\end{cases}$$

Dann ist $g\geq 0$, sowie $\left(\tilde{f}\cdot g\right)(x)\leq 0$ für alle $x\in[\alpha,\beta]$, sowie $\left(\tilde{f}\cdot g\right)(x_0)=\tilde{f}(x_0)<0$ mit $x_0\in\sigma(A)$.

Nun ist aber $\tilde{f}(A)=f(A)\geq 0$ nach Annahme und $g(A)\geq 0$ nach dem bereits Gezeigten und wegen $g\geq 0$. Wegen $\tilde{f}(A),g(A)\in\overline{\mathbb{R}[A]}$ kommutieren $\tilde{f}(A)$ und $g(A)$, so dass nach Lemma 9 schon $0\leq\tilde{f}(A)\cdot g(A)=\left(\tilde{f}\cdot g\right)(A)$ folgt. Nun ist aber auch $-\tilde{f}\cdot g\geq 0$, also $-\left(\tilde{f}\cdot g\right)(A)=\left(-\tilde{f}\cdot g\right)(A)\geq 0$, das heißt $0\leq\left(\tilde{f}\cdot g\right)(A)\leq 0$, so dass nach Lemma 5 schon $\left(\tilde{f}\cdot g\right)(A)=0$ folgt. Es ist also $\tilde{f}\cdot g\in J$, womit insbesondere $x_0\in\sigma(A)=\bigcap_{h\in J}h^{-1}(\{0\})\subset\left(\tilde{f}\cdot g\right)^{-1}(\{0\})$ folgt. Es ist aber $\left(\tilde{f}\cdot g\right)(x_0)<0$. Widerspruch. Also ist $f\geq 0$.

(4) Sei nun $f\in C(\sigma(A),\mathbb{R})$ und $\gamma:=\|f(A)\|$. Dann gilt nach Lemma 5 schon $-\gamma\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\leq f(A)\leq\gamma\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, also $(f-\gamma)(A)\geq 0$ und $(f+\gamma)(A)\geq 0$, so dass nach Schritt 2 schon $f-\gamma\geq 0$ und $f+\gamma\geq 0$ auf $\sigma(A)$ folgt. Damit ist aber $-\gamma\leq f\leq\gamma$ auf $\sigma(A)$, also $\|f\|_{\sigma(A)}\leq\gamma=\|f(A)\|\leq\|f\|_{\sigma(A)}$, wobei die letzte Abschätzung nach Schritt 1 folgt.

(5) Nach dem bereits Gezeigten ist Γ eine Isometrie. Da weiterhin $\Gamma(C(\sigma(A),\mathbb{R}))\supset\Gamma(\mathbb{R}[x])=\mathbb{R}[A]$ folgt und das Bild eines vollständigen Raumes unter einer Isometrie vollständig, also abgeschlossen ist, folgt $\Gamma(C(\sigma(A),\mathbb{R}))\supset\overline{\mathbb{R}[A]}$. Damit ist Γ auch bijektiv.

□

Lemma 12. *Sei $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann ist*

$$\sigma(A)=\{z\in\mathbb{C}\mid A-z\cdot id_{\mathcal{H}}\text{ nicht invertierbar}\}.$$

Insbesondere hängt das Spektrum von A nicht von der Wahl von $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ab.

Beweis. Sei $\Gamma:=\{z\in\mathbb{C}\mid A-z\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\text{ nicht invertierbar}\}$.

(1) $\Gamma\subset\mathbb{R}$, denn angenommen, es existiert ein $z\in\Gamma\setminus\mathbb{R}$. Definiere

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},t\mapsto(t-z)(t-\overline{z})=t^2-tz-t\overline{z}+z\overline{z}=t^2-2\mathrm{Re}(z)\,t+|z|^2.$$

Dann gilt $g(x)\neq 0$ für alle $x\in\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, so dass $h:\sigma(A)\to\mathbb{R},t\mapsto\frac{1}{g(t)}$ wohldefiniert und stetig ist. Damit folgt:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{H}}=(\sigma(A)\to\mathbb{R},x\mapsto 1)(A)=\left(g|_{\sigma(A)}\cdot h\right)(A)=g(A)\circ h(A)=h(A)\circ g(A).$$

Damit folgt aber für $B:=h(A)\circ(A-\overline{z}\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})=(A-\overline{z}\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})\circ h(A)$ schon:

$$\begin{aligned}B\circ(A-z\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}}) &= h(A)\circ(A-\overline{z}\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})\circ(A-z\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})=h(A)\circ g(A)=\mathrm{id}_{\mathcal{H}},\\ (A-z\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})\circ B &= B\circ(A-z\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})=\mathrm{id}_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

so dass $(A-z\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{H}})$ invertierbar ist, im Widerspruch zu $z\in\Gamma$.

(2) „$\Gamma \subset \sigma(A)$“: Das ist äquivalent zu (Komplement bezüglich $\mathbb{R}$ gebildet, denn nach Schritt 1 gilt $\Gamma \subset \mathbb{R}$): $(\sigma(A))^c \subset \Gamma^c$. Sei also $\xi \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$. Dann ist $f : \sigma(A) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x-\xi}$ wohldefiniert und stetig, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(A) \circ (A - \xi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) &= (f \cdot (x \mapsto x - \xi))(A) = (x \mapsto 1)(A) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}, \\ (A - \xi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ f(A) &= f(A) \circ (A - \xi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

das heißt, es ist $A - \xi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ invertierbar, also $\xi \in \Gamma^c$.

(3) „$\sigma(A) \subset \Gamma$“: Sei $\xi \in \sigma(A)$. Angenommen, es ist $\xi \notin \Gamma$, das heißt $A - \xi \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ ist invertierbar mit Inverser $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definiere dann für $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x-\xi|}, & |x - \xi| \geq \frac{1}{n}, \\ n, & |x - \xi| \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Dann ist g_n stetig mit $\|g_n\|_{\sigma(A)} \geq |g_n(\xi)| = n$. Weiterhin ist

$$|(x - \xi) \cdot g_n(x)| = \begin{cases} |x - \xi| \cdot \frac{1}{|x-\xi|} = 1, & |x - \xi| \geq \frac{1}{n}, \\ |x - \xi| \cdot n \leq 1, & |x - \xi| \leq \frac{1}{n} \end{cases} \leq 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (insbesondere also für alle $x \in \sigma(A)$), so dass nach Satz 11 folgt:

$$\|(A - \xi \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \cdot g_n(A)\| = \|((x \mapsto x - \xi) \cdot g_n)(A)\| \leq \|(x \mapsto x - \xi) \cdot g_n\|_{\sigma(A)} \leq 1.$$

Damit ergibt sich aber: $\|g_n(A)\| = \|B \circ (A - \xi \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ g_n(A)\| \leq \|B\| \cdot \|(A - \xi \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ g_n(A)\| \leq \|B\|$. Nach Satz 11 folgt aber wieder: $\|B\| \geq \|g_n(A)\| = \|g_n\|_{\sigma(A)} \geq n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Widerspruch. Also ist $\xi \in \Gamma$.

□

Definition 13. Sei $\emptyset \neq S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für $V \leq \mathcal{H}$ sagen wir, dass V invariant unter S ist, falls $Tx \in V$ für alle $T \in S$ und alle $x \in V$ gilt.

Bemerkung. Sei $V \leq \mathcal{H}$ invariant unter S. Dann ist auch $\overline{V}$ invariant unter S, denn für $x \in \overline{V}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$. Damit folgt für $T \in S$ beliebig:

$$Tx = \lim_{n \to \infty} \underbrace{Tx_n}_{\in V} \in \overline{V}.$$

Theorem 14. *(Lemma von Schur)*

(1) *Sei $\emptyset \neq S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so dass für jeden abgeschlossenen Unterraum $V \leq \mathcal{H}$ der invariant unter S ist, schon $V \in \{\{0\}, \mathcal{H}\}$ folgt. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert mit $A \in C_S$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $A = cI$.*

(2) *Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, $A \notin \mathbb{R} \cdot id_{\mathcal{H}}$. Dann existiert eine Orthogonalprojektion $0 \neq P \neq id_{\mathcal{H}}$, so dass für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AT = TA$ schon $TP = PT$ gilt.*

Beweis.

(1)

(a) Wir zeigen zuerst, dass $\sigma(A)$ genau ein Element hat. Angenommen, es existieren $x, y \in \sigma(A)$ mit $x \neq y$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x < y$ (sonst tausche x, y). Definiere

$$f : \sigma(A) \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} -t + \frac{x+y}{2}, & t \leq \frac{x+y}{2}, \\ 0, & t \geq \frac{x+y}{2} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g : \sigma(A) \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t - \frac{x+y}{2}, & t \geq \frac{x+y}{2}, \\ 0, & t \leq \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

Dann sind f, g stetig (und wohldefiniert). Wegen $AB = BA$ für $B \in S$ folgt nach Lemma 2 schon $TB = BT$ für alle $T \in \overline{\mathbb{R}[A]}$ und $B \in S$. Damit folgt, dass $V := (f(A))(\mathcal{H})$ invariant unter S ist, denn für $B \in S$ und $z \in (f(A))(\mathcal{H})$ ist $z = (f(A))(\tilde{z})$ für ein $\tilde{z} \in \mathcal{H}$, also

$$B(z) = B((f(A))(\tilde{z})) = (B \circ f(A))(\tilde{z}) = (f(A) \circ B)(\tilde{z}) = (f(A))(B(\tilde{z})) \in (f(A))(\mathcal{H}) = V.$$

Also ist nach obiger Bemerkung auch $\overline{V} \leq \mathcal{H}$ invariant unter S. Falls $\overline{V} = \{0\}$ wäre, wäre auch $(f(A))(\mathcal{H}) = V = \{0\}$, also $0 = f(A)$ und damit

$$0 = \|f(A)\| = \|f\|_{\sigma(A)} \overset{x \in \sigma(A)}{\geq} |f(x)| \overset{x = \frac{x+x}{2} \leq \frac{x+y}{2}}{=} \left| -x + \frac{x+y}{2} \right| = \left| \frac{y-x}{2} \right| > 0.$$

Widerspruch. Also ist $\overline{V} \neq \{0\}$, so dass nach Voraussetzung schon $\overline{V} = \mathcal{H}$ folgt.

Es gilt aber für $z \in V = (f(A))(\mathcal{H})$, also $z = (f(A))(\tilde{z})$ für ein $\tilde{z} \in \mathcal{H}$:

$$(g(A))(z) = (g(A))(f(A)(\tilde{z})) = (g(A) \circ f(A))(\tilde{z}) = ((g \cdot f)(A))(\tilde{z}) = ((t \mapsto 0)(A))(\tilde{z}) = 0,$$

das heißt $(g(A))(V) \subset \{0\}$. Damit folgt aber schon

$$(g(A))(\mathcal{H}) = (g(A))\left(\overline{V}\right) \subset \overline{(g(A))(V)} \subset \overline{\{0\}} = \{0\},$$

also $g(A) = 0$ und damit

$$0 = \|g(A)\| = \|g\|_{\sigma(A)} \overset{y \in \sigma(A)}{\geq} |g(y)| \overset{y = \frac{y+y}{2} \geq \frac{x+y}{2}}{=} \left|y - \frac{x+y}{2}\right| = \left|\frac{y-x}{2}\right| > 0.$$

Widerspruch. Also hat $\sigma(A)$ (maximal) ein Element, nach Satz 11 also genau ein Element.

(b) Es ist nach Schritt (a) schon $\sigma(A) = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(t \mapsto x)|_{\sigma(A)} = (t \mapsto t)|_{\sigma(A)}$ und damit:

$$A = (t \mapsto t)(A) = (t \mapsto x)(A) = x \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}},$$

also die Behauptung.

(2)

(a) Angenommen, die Behauptung gilt nicht, das heißt, für jede Orthogonalprojektion $0 \neq P \neq \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ existiert ein $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AT = TA$, aber $TP \neq PT$.

(b) Sei $S := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid AT = TA\}$. Dann ist $A \in S$, also $S \neq \emptyset$.

(c) Für jedes $T \in S$ ist auch $T^* \in S$, denn $AT^* = A^*T^* = (TA)^* = (AT)^* = T^*A^* = T^*A$.

(d) Für jeden Unterraum $V \leq \mathcal{H}$ ist mit V auch $V^\perp$ invariant unter S, denn es gilt für $x \in V^\perp$, $T \in S$ und alle $y \in V$ (wegen $T^* \in S$ und da V invariant unter S ist, ist auch $T^*y \in V$): $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$, also $Tx \in V^\perp$.

(e) Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $V \leq \mathcal{H}$ mit $V \notin \{\{0\}, \mathcal{H}\}$, der unter S invariant ist. Sei nämlich V ein solcher Unterraum und sei P die Orthogonalprojektion auf V. Dann gilt $0 \neq P \neq \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Also existiert nach Annahme ein $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AT = TA$ (also $T \in S$), aber $TP \neq PT$.
Wegen $TP \neq PT$ existiert ein $x \in \mathcal{H}$ mit $T(P(x)) \neq P(T(x))$, so dass folgt:

$$P(T(x)) = P\left(T\left(\underbrace{P(x)}_{\in V} + \underbrace{(x - P(x))}_{\in V^\perp}\right)\right) = P\left(\underbrace{T(P(x))}_{\in V} + \underbrace{T(x - P(x))}_{\in V^\perp}\right) = T(P(x)),$$

Widerspruch.

(f) Also folgt für jeden abgeschlossenen, unter S invarianten Unterraum $V \leq \mathcal{H}$ schon $V \in \{\{0\}, \mathcal{H}\}$, so dass nach dem ersten Teil $A = c \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ folgt. Widerspruch zu $A \notin \mathbb{R} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Also muss die Annahme, dass die Behauptung falsch ist, fallen gelassen werden.

□