



Harmonische Analysis, Übungsblatt 1

Wird besprochen am Dienstag, den 17. April 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 1 Es sei $U \subset X$, $x \in X$, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X . Zeigen Sie:

- (a) $\overline{U} = \overline{\overline{U}}$. Speziell ist U abgeschlossen genau dann, wenn $U = \overline{U}$.
- (b) $x \in \overline{U} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_x : U \cap V \neq \emptyset$
- (c) Ist $\mathcal{T}$ von einer Metrik d induziert, so gilt: $x \in \overline{U} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (bzgl. d).
- (d) U liegt dicht in X genau dann, wenn für alle $\emptyset \neq V \in \mathcal{T}$ gilt: $U \cap V \neq \emptyset$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie:

- (a) f stetig $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}_{f(x)} \exists V \in \mathcal{U}_x$ mit $f(V) \subset U$.
- (b) $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ stetig $\Rightarrow g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.
- (c) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig auf X , genau dann wenn $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle $A \subset X$ gilt.
- (d) Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion. Ist $D \subset X$ eine dichte Teilmenge von X , so ist $f(D)$ dicht in Y .

Aufgabe 3 (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Produkttopologie zweier topologischer Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ besteht aus allen kartesischen Produkten von Mengen aus $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.

- (b) Es sei $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ versehen mit der durch die Metrik in Beispiel 0.5 (1) induzierte Topologie. Zeigen Sie: Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ stimmt mit der auf $\mathbb{R}^2$ durch die Metrik induzierte Topologie überein.

Aufgabe 4 Es sei X ein normierter reeller Vektorraum, d. h. die Norm definiere die Topologie auf X . Zeigen Sie: Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ und Vektoraddition $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x + y$ sind stetig, wobei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie und $\mathbb{R} \times X$ und $X \times X$ mit der entsprechenden Produkttopologie versehen wird.

Leistungsnachweis: 50 % der Hausaufgaben und mündliche Prüfung

Sprechstunden: Prof. Dr. H. Führ Mo. 11:00 Uhr Raum 101, Templergraben 81
Dr. M. Neuhauser nach Vereinb. Raum 103, Templergraben 81