Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 23. April 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 2

Wird besprochen am Dienstag, den 24. April 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 5 Es sei X ein lokalkompakter topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}$. Es sei $X^* = X \cup \{\infty\}$, dabei $\infty \notin X$. Wir definieren $\mathcal{T}^*$ als die Menge der Teilmengen $U \subset X^*$, für die gilt:

- $\infty \in U$ und $X \setminus U \subset X$ ist kompakt oder
- $\infty \notin U$ und $U \subset X$ ist offen in X.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{T}^*$ ist eine Topologie, mit $\mathcal{T}^*|X = \mathcal{T}$.

(b) $(X^*, \mathcal{T}^*)$ ist kompakt.

(c) $f \in C(X, \mathbb{C})$ besitzt genau dann eine stetige Fortsetzung $f^* : X^* \to \mathbb{C}$, wenn $f = f_0 + c$, mit $f_0 \in C_0(X, \mathbb{C})$ und $c \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Der topologische Raum X^* heißt *Alexandroff-Kompaktifizierung* oder *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.

Aufgabe 6 Es sei X lokalkompakt, und $\mathcal{A} \subset C_0(X, \mathbb{C})$ eine bezüglich $\|\cdot\|_u$ abgeschlossene Unteralgebra mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von X.
- Für alle $f \in \mathcal{A}$: $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie: Entweder $\mathcal{A} = C_0(X, \mathbb{C})$ oder es gibt $x_0 \in X$ mit $\mathcal{A} = \{f \in C_0(X, \mathbb{C}) : f(x_0) = 0\}$.

Aufgabe 7 Es seien G eine topologische Gruppe, $A \subset G$ kompakt und $W \in \mathcal{U}_A$ eine Umgebung von A. Zeigen Sie: Es gibt ein $V \in \mathcal{U}_e$ mit $VAV \subset W$.

Aufgabe 8 (Elementare Eigenschaften topologischer Gruppen) Es sei $(G, \mathcal{T})$ eine *topologische Gruppe*, d. h. G ist eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G, bezüglich der die Multiplikation $G \times G \to G$ und die Inversion $G \to G$ stetige Abbildungen sind ($G \times G$ mit der Produkttopologie versehen). $\mathcal{T}$ sei Hausdorffsch. Zeigen Sie:

(a) $(G, \mathcal{T})$ ist eine topologische Gruppe genau dann, wenn die Abbildung

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$$

stetig ist.

(b) $\forall U \in \mathcal{U}_e \forall x \in G \exists V \subset U : xVx^{-1} = \{xyx^{-1} : y \in V\} \subset U.$

(c) Ist A kompakt, B abgeschlossen, so sind AB und BA abgeschlossen.

Hinweis: Aufgabe 7.

Bleibt das richtig, wenn A und B nur als abgeschlossen vorausgesetzt werden?