LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 7. Mai 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 3

Wird besprochen am Dienstag, den 8. Mai 2012, 16:00 Uhr

Aufgabe 9 Es sei $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ das kartesische Produkt topologischer Gruppen, versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie: Dann ist G eine topologische Gruppe.

Aufgabe 10 Es seien G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge. Es sei

$$\langle A \rangle = \bigcap \{H < G : A \subset H\}$$

die *von A erzeugte Untergruppe*. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\langle A \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cup A^{-1})^n$.

(b) Erfüllt A die Bedingung $\forall y \in A \forall x \in G : xyx^{-1} \in A$, folgt $\langle A \rangle \lhd G$.

Aufgabe 11 Es seien G eine topologische Gruppe und $H < G$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (i) Die Untergruppe H ist offen.

   (ii) Es gibt $V \subset G$ offen in G und nicht leer mit $V \subset H$.

   (iii) Es gilt $H \in \mathcal{U}_e$.

Die Gruppentopologie von G sei nun lokalkompakt. Zeigen Sie:

(b) Dann enthält G eine offene σ-kompakte Untergruppe H.

(c) Genau dann ist G σ-kompakt, wenn G/H abzählbar ist.

Dabei sei H die Untergruppe aus (b).

Aufgabe 12 Es sei G eine lokalkompakte und σ-kompakte topologische Gruppe.

Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Folge kompakter Teilmengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von G, für die für alle $A \subset G$ gilt: A ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen ist und $A \subset K_n$, für ein $n \in \mathbb{N}$.

(*Konstruktionshinweis*: Es sei $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, mit A_n kompakt. Es sei $V \in \mathcal{U}_e$ kompakt. Dann ist $K_n = V^n \bigcup_{k\leq n} A_k$ wie gewünscht.)

(b) Falls G nicht kompakt ist, existiert $U \in \mathcal{U}_e$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ mit

$$n < m \Rightarrow x_n U \cap x_m U = \emptyset \, .$$

Aufgabe 13 Es sei X ein lokalkompakter topologischer Raum, μ ein Radon-Maß auf X mit der Eigenschaft $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$. Ferner sei $A \subset X$ eine Borel-Menge mit $\mu(A) < \infty$. Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in [0, \mu\,(A)]$ gibt es eine Borel-Menge B mit $\mu(B) = \alpha$.

Aufgabe 14 Es seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ zwei Gruppentopologien auf einer Gruppe G. Jede $\mathcal{T}$-dichte Teilmenge von G sei $\mathcal{S}$-dicht. Man zeige $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Zum Vergleich: Auf $\mathbb{R}$ ist die übliche Topologie echt gröber als die Sorgenfrey-Topologie (welche von den Intervallen $[a, b)$ mit $a < b$ erzeugt wird), obgleich $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dieselben dichten Teilmengen besitzen.