Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 9. Mai 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 4

Wird besprochen am Dienstag, den 15. Mai 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 15 Es sei $G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ versehen mit dem Produkt komplexer Zahlen. Es sei $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} < G$. Bestimmen Sie Haarintegrale auf H und G.

Aufgabe 16 Es sei $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen versehen mit der Relativtopologie bezüglich der Inklusion $G \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Es bezeichne dA das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: Durch

$$I(f) = \int_G f(A) \frac{dA}{|\det(A)|^n}$$

ist ein linkes Haarintegral auf G gegeben. G ist unimodular.

Aufgabe 17 Es sei

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Zeigen Sie:

(a) G ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

(b) G ist nicht kommutativ.

(c) Durch

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d(x, y, z)$$

wird ein beidseitig invariantes Integral auf G definiert. Dabei bezeichnet $d(x, y, z)$ Integration gegen das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 18 Es sei G lokalkompakt, μ_G ein linkes Haarmaß von G. Zeigen Sie: Genau dann ist G kompakt, wenn $\mu_G(G) < \infty$ ist.

Aufgabe 19 Es sei G eine abzählbare lokalkompakte Gruppe. Zeigen Sie: G trägt die diskrete Topologie. (*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst das linke Haarmaß von G.)