Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 21. Mai 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 5

Wird besprochen am Dienstag, den 22. Mai 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 20 Es seien G eine topologische Gruppe, die nicht unimodular ist, und ν ein rechtes Haarmaß. Zeigen Sie $\mathrm{L}^p(G,\nu) \neq \mathrm{L}^p(G)$ für $p < \infty$.

Aufgabe 21 Zeigen Sie Satz 4.11 aus der Vorlesung: Eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe G ist kommutativ genau dann, wenn die Gruppenalgebra $\mathrm{L}^1(G)$ kommutativ ist.

Aufgabe 22 Es sei G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe.

(a) Es seien $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$. Zeigen Sie $f * g \in \overline{\operatorname{span}\{L_x g : x \in G\}}^{\|\cdot\|_u}$.

(*Hinweis*: Approximieren Sie f durch geeignete Treppenfunktionen.)

(b) Es sei $I \subset \mathrm{L}^1(G)$ ein abgeschlossener Teilraum. Man nennt I ein *Linksideal*, wenn $f * g \in I$ für alle $f \in \mathrm{L}^1(G)$ und $g \in I$ gilt. Zeigen Sie:

$$I \text{ ist ein Linksideal } \Leftrightarrow \forall g \in I \forall x \in G \ : \ L_x g \in I \ .$$

(*Hinweis*: Für „$\Leftarrow$“ können Sie $f * g \in \overline{\operatorname{span}\{L_x g : x \in G\}}^{\|\cdot\|_1}$ für $f, g \in \mathrm{L}^1(G)$ ohne Beweis verwenden.)

Aufgabe 23 Es seien G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler. Es sei μ_N ein linkes Haarmaß von N. Für $f \in \mathcal{C}_c(G)$ sei $P_N(f) : G/N \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P_N(f)(yN) = \int_N f(yx) d\mu_N(x) \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $P_N(f)$ ist wohldefiniert und $P_N(f) \in \mathcal{C}_c(G/N)$.

(b) Zu $g \in \mathcal{C}_c(G/N)$ mit $g \geq 0$ gibt es $f \in \mathcal{C}_c(G)$ mit $f \geq 0$ und $P_N(f) = g$. Insbesondere ist P_N surjektiv.
(*Hinweis*: Sie dürfen ohne Beweis folgende Aussage verwenden: Zu jedem $C \subset G/N$ kompakt existiert $D \subset G$ kompakt, für das $q_N(D) = C$. Dabei ist $q_N : G \to G/N$ die kanonische Abbildung.)

Aufgabe 24 Es seien G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler. Es seien μ_G und μ_N linke Haarmaße von G bzw. N.

(a) Zeigen Sie: Zu μ_N, μ_G gibt es genau ein linkes Haarmaß $\mu_{G/N}$, für das die *Weil'sche Integralformel* gilt. D. h. für alle $f \in \mathcal{C}_c(G)$ gilt

$$\int\limits_G f(z) d\mu_G(z) = \int\limits_{G/N} \int\limits_N f(yx) d\mu_N(x) d\mu_{G/N}(yN) \ .$$

(b) Folgern Sie: Die Modularfunktion Δ_N ist die Einschränkung von Δ_G auf N.