Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 11. Juni 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 7

Wird besprochen am Dienstag, den 12. Juni 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 30 Verifizieren Sie Bemerkung 6.2: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie für einen Homomorphismus $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ die Äquivalenz folgender dreier Aussagen.

(a) Der Homomorphismus π ist stark stetig.

(b) Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: Die Abbildung $G \to \mathcal{H}$, $x \mapsto \pi(x)f$ ist stetig bez. der Normtopologie auf $\mathcal{H}$.

(c) Es gibt ein $M \subset \mathcal{H}$ mit folgenden Eigenschaften: Es ist $\overline{\operatorname{span}(M)} = \mathcal{H}$ und für alle $f \in M$ ist die Abbildung $G \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle \pi(x)f, f\rangle$ stetig beim neutralen Element.

Aufgabe 31 (a) Es sei $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ ein differenzierbarer Charakter.

Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\chi(x) = e^{i\xi x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(Bemerkung: Man kann Differenzierbarkeit für jeden Charakter zeigen. Diese Teilaufgabe charakterisiert also *alle* Charaktere von $\mathbb{R}$.)

(b) Zeigen Sie: Die reguläre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ besitzt keine irreduzible Teildarstellung.

Aufgabe 32 In der folgenden Aufgabe benötigen wir eine Aussage aus der Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$. Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ wird definiert als:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Der Eindeutigkeitssatz für Fouriertransformierte besagt: $\widehat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$

Es sei nun $\mathcal{H}_\pi = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und $\pi : \mathbb{R} \to U(\mathcal{H}_\pi)$ definiert durch

$$\pi(x)f(y) = e^{-ixy} f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung π ist eine stark stetige, unitäre Darstellung.
(Bemerkung: Der Satz von Plancherel besagt die Existenz einer unitären Fortsetzung $\mathcal{P} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ von $\mathcal{F}|_{\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2}$ mit $\mathcal{P} \in C(\lambda_{\mathbb{R}}, \pi)$. Also gilt $\lambda_{\mathbb{R}} \simeq \pi$.)

(b) Es sei $P \in C(\pi)$ eine Projektion. Zeigen Sie $f \cdot Pg = Pf \cdot g$ punktweise fast überall für alle $f, g \in \mathcal{H}_\pi$.
(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst $f - Pf \perp \pi(x)Pg$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

(c) Folgern Sie für eine Projektion $P \in B(\mathcal{H}_\pi)$: Es gilt $P \in C(\pi)$ genau dann, wenn es eine Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ gibt mit $(Pf)(y) = \chi_A(y)f(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 33 Wie in Aufgabe 32 sei $\mathcal{H}_\pi = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und $\pi : \mathbb{R} \to U(\mathcal{H}_\pi)$ definiert durch

$$\pi(x)f(y) = e^{-ixy}f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Darstellung π besitzt keine irreduzible Teildarstellung.

(b) Der Vektor $g \in \mathcal{H}_\pi$ ist zyklisch genau dann, wenn $g(y) \neq 0$ f. ü. in $y \in \mathbb{R}$.

(*Hinweis*: Betrachten Sie die Projektion auf den von g erzeugten, invarianten und abgeschlossenen Teilraum.)