Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 18. Juni 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 8

Wird besprochen am Dienstag, den 19. Juni 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 34 Es sei $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit Multiplikation $(b, a)(s, t) = (b + as, at)$. Für $(b, a) \in G$ und $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definieren wir:

$$\pi(b, a) f(x) = |a|^{1/2} e^{-ibx} f(ax)$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung π ist eine stark stetige, unitäre Darstellung von G auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

(b) Die Darstellung π ist irreduzibel. (*Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabe 32 (c) von Blatt 7.)

(c) Es gilt $\pi \simeq \overline{\pi}$.

Aufgabe 35 Es seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Prä-Hilberträume und $x_\iota \in \mathcal{H}_1$, $\iota \in I$, mit $\operatorname{span}(\{x_\iota : \iota \in I\}) = \mathcal{H}_1$. Es gebe $y_\iota \in \mathcal{H}_2$, $\iota \in I$, mit der Eigenschaft $\langle x_j, x_k \rangle = \langle y_j, y_k \rangle$ für alle $j, k \in I$.

Zeigen Sie: Dann existiert genau eine lineare isometrische Abbildung $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $T(x_\iota) = y_\iota$ für alle $\iota \in I$.

Aufgabe 36 Es seien X und Y lokalkompakte Räume mit Radon-Maßen μ bzw. ν. Es sei $F \in \mathrm{L}^2(X \times Y)$ und $A_F : \mathrm{L}^2(Y) \to \mathrm{L}^2(X)$ definiert durch:

$$(A_F g)(x) = \int_Y F(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}\nu(y)$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $\mathrm{L}^2(X \times Y) \to \mathrm{HS}\left(\mathrm{L}^2(Y), \mathrm{L}^2(X)\right)$, $F \mapsto A_F$ ist unitär.

Aufgabe 37 Es sei G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe.

Zeigen Sie: $\lambda_G \simeq \overline{\lambda}_G \simeq \rho_G \simeq \overline{\rho}_G$.

Aufgabe 38 Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $K(\mathcal{H})$ der kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}$ ist ein in der Operatornorm abgeschlosses Ideal in $B(\mathcal{H})$, d. h. ein abgeschlossener Untervektorraum mit $ST \in K(\mathcal{H})$, falls $S, T \in B(\mathcal{H})$ und S oder T kompakt.

(b) Jeder Hilbert–Schmidt-Operator $T \in \mathrm{HS}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ist kompakt.