Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 25. Juni 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 9

Wird besprochen am Dienstag, den 26. Juni 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 39 Es sei $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ mit der Gruppenmultiplikation

$$(p,q,r)\,(x,y,z) = \left(p+x, q+y, rze^{\pi i(py-qx)}\right)$$

für $(p,q,r), (x,y,z) \in G$ die „reduzierte Heisenberggruppe". Durch $\pi : G \to U\left(\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\right)$, $\pi(x,y,z)\,u(t) = ze^{2\pi iyt+\pi ixy}u(t+x)$ wird eine Darstellung definiert.

(a) Zeigen Sie: Für $u, v \in \mathrm{L}^2(G)$ gilt $\|C_{u,v}\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

Hinweis: Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ wird definiert als

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx\ .$$

Der Satz von Plancherel besagt die Existenz einer unitären Fortsetzung $\mathcal{P} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ von $\mathcal{F}|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}$.

(b) Folgern Sie $\pi \in \widehat{G}_d$.

Aufgabe 40 Es sei π eine *irreduzible* Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$ und $\mathcal{H}_0$ ein beliebiger Hilbertraum. Es sei $\sigma : G \to U(\mathrm{HS}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\pi))$, $\sigma(x)\,A = \pi(x) \circ A$.

(a) Zeigen Sie: Ein Operator $T \in B(\mathrm{HS}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\pi))$ ist genau dann in $C(\sigma)$, wenn es ein $S \in B(\mathcal{H}_0)$ gibt mit $T(A) = A \circ S$.

(b) Folgern Sie: Ist π eine irreduzible Darstellung von G und σ eine irreduzible Darstellung einer lokalkompakten Gruppe H, dann ist $\pi \check{\otimes} \sigma : G \times H \to U(\mathrm{HS}(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\pi))$ eine irreduzible Darstellung von $G \times H$.

Aufgabe 41 Es sei G eine kompakte Gruppe. Zeigen Sie $\widehat{G} = \widehat{G}_d$.

Aufgabe 42 Es sei G eine abelsche lokalkompakte Gruppe.

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender dreier Aussagen:

(a) $\widehat{G}_d \neq \emptyset$

(b) $\widehat{G}_d = \widehat{G}$

(c) G kompakt