Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 2. Juli 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 10

Wird besprochen am Dienstag, den 3. Juli 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 43 Es sei π eine irreduzible Darstellung der lokalkompakten Gruppe G auf $\mathcal{H}_\pi$, für $u \in \mathcal{H}_\pi$ sei $W_u : \operatorname{dom}(W_u) \to \mathrm{L}^2(G)$, $W_u v = C^\pi_{v,u}$ für $v \in \operatorname{dom}(W_u) = \left\{v \in \mathcal{H}_\pi : C^\pi_{v,u} \in \mathrm{L}^2(G)\right\}$, $D_\pi = \{u \in \mathcal{H}_\pi : \operatorname{dom}(W_u) \neq \{0\}\}$ und $\mathrm{L}^2_\pi(G) = \overline{\operatorname{span}\{W_u v : u \in D_\pi, v \in \operatorname{dom}(W_u)\}}$. Zeigen Sie für $\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2(G)$ abgeschlossen und λ_G-invariant die Äquivalenz folgender beider Aussagen:

(a) $\lambda_G^{\mathcal{H}} \simeq \pi$

(b) $\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2_\pi(G)$

Aufgabe 44 Wie in Aufgabe 39 sei $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ mit der Gruppenmultiplikation

$$(p,q,r)(x,y,z) = \left(p+x, q+y, rze^{\pi i(py-qx)}\right)$$

für $(p,q,r), (x,y,z) \in G$ die „reduzierte Heisenberggruppe". Durch $\pi_n : G \to U\left(\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\right)$, $\pi_n(x,y,z)u(t) = z^n e^{2n\pi iyt + n\pi ixy} u(t+x)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, wird eine Darstellung definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Darstellungen π_n sind quadratintegrierbar.

(b) Es gilt $\mathrm{L}^2_{\pi_n}(G) = \{f \in \mathrm{L}^2(G) : f(x,y,z) = \overline{z}^n f(x,y,1) \text{ f. ü.}\}$.

(c) Es gilt $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathrm{L}^2_{\pi_n}(G) = \left\{f \in \mathrm{L}^2(G) : f(x,y,z) = f(x,y,1)\right\}^\perp$.

Aufgabe 45 Es sei G eine lokalkompakte Gruppe und π eine irreduzible Darstellung auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

(a) Quadratintegierbare Matrixkoeffizienten sind in $\mathcal{C}_0(G)$.

(b) Falls G nicht kompakt und π endlich-dimensional ist, ist π nicht quadratintegrierbar.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 12 und $U(n)$ kompakt.

Aufgabe 46 Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie: Der Raum der kompakten Operatoren ist dicht in $B(\mathcal{H})$ bez. der starken Operatortopologie.