Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 9. Juli 2012

Harmonische Analysis, Übungsblatt 11

Wird besprochen am Dienstag, den 10. Juli 2012, 11:45 Uhr

Aufgabe 47 Es sei $H = \{0,1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ versehen mit der üblichen Gruppenstruktur und der diskreten Topologie. Es sei $G = H^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in H\}$ versehen mit Produkttopologie und -gruppenstruktur.

(a) Zeigen Sie: Damit ist G eine kompakte topologische Gruppe.

(b) Bestimmen Sie die stetigen Charaktere von G.

Aufgabe 48 Wie in Aufgabe 47 sei $G = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit der Produkttopologie. Es sei $\psi : G \to [0,1]$, $\psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$. Bekanntlich ist ψ surjektiv. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung ψ ist stetig.

(b) Es existieren abzählbare Mengen $A \subset G$ und $B \subset [0,1]$, für die $\psi : G \setminus A \to [0,1] \setminus B$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 49 Wie in Aufgabe 47 sei $G = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit Produkttopologie und -gruppenstruktur.

(a) Es sei μ_G das Haarmaß auf G normiert durch $\mu_G(G) = 1$. Es sei $\psi^*(\mu_G)$ das Bildmaß von μ_G unter ψ definiert durch $\psi^*(\mu_G)(U) = \mu_G(\psi^{-1}(U))$. Zeigen Sie: Das Bildmaß $\psi^*(\mu_G)$ ist das Standardmaß auf $[0,1]$. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Bilder der Untergruppen $G_k = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0\}$ und deren Nebenklassen unter ψ.)

(b) Für einen Charakter χ sei $\widetilde{\chi}$ auf $[0,1] \setminus B$ aus Teil (b) von Aufgabe 48 definiert durch $\widetilde{\chi} = \chi \circ \psi^{-1}$ und auf $[0,1]$ beliebig fortgesetzt. Begründen Sie, warum die Menge $\{\widetilde{\chi} : \chi \text{ stetiger Charakter von } G\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([0,1])$ ist, und geben Sie die Elemente dieser Basis explizit als Treppenfunktionen an.

Die in Punkt (b) konstruierten Funktionen sind die sogenannten *Walsh-Funktionen*.

Aufgabe 50 Es seien π und σ Darstellungen der lokalkompakten Gruppe G.

(a) Es sei $V = \mathrm{HS}(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma) \cap C(\pi, \sigma)$. Zeigen Sie: Dann ist V ein abgeschlossener Teilraum von $\mathrm{HS}(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma)$ in der Hilbert–Schmidt-Norm.

(b) Es sei nun G kompakt. Zeigen Sie: Die Abbildung $P : \mathrm{HS}(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma) \to \mathrm{HS}(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma)$, $P : T \mapsto T_G$ ist die Orthogonalprojektion auf V, wobei T_G wie in (8.1) definiert sei.