Ganze Funktionen endlicher Ordnung und Anwendungen auf die Riemannsche Zeta-Funktion

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie

18.06.2012

Florian Goy

Wir untersuchen zunächst ganze Funktionen endlicher Ordnung, um damit die Produktsätze von WEIERSTRASS und HADAMARD zu formulieren. Anschließend wenden wir diese Resultate auf die RIEMANNsche Zeta-Funktion an.

§ 1 Ganze Funktionen endlicher Ordnung

Im ersten Paragraphen betrachten wir zunächst ganze Funktionen endlicher Ordnung, bevor wir die Produktsätze von WEIERSTRASS und HADAMARD formulieren, mit denen wir ganze Funktionen als abzählbare Produkte ganzer Funktionen darstellen können.
Im Hinblick auf das Ziel des Gesamtvortrags sind wir somit in der Lage, die weiter unten definierte, ganze Funktion ξ^*, die als Produkt meromorpher Funktionen eingeführt wird, als abzählbares Produkt holomorpher Funktionen darzustellen.
Wir erhalten mit diesen Resultaten weiterhin eine Aussage über die Nullstellen der RIEMANNschen Zeta-Funktion.
Wir erinnern zunächst an die Defintion einer ganzen Funktion endlicher Ordnung.

Eine ganze Funktion f heißt von *endlicher Ordnung*, falls es ein $\alpha > 0$ und ein $c > 0$ gibt, sodass

$$M_f(R) \leq c \cdot \exp(R^\alpha) \quad \text{für alle } R > 0, \tag{1}$$

wobei

$$M_f(R) = \max\{|f(z)| \ : \ |z| = R\}.$$

In diesem Fall nennt man

$$o(f) := \inf\{\alpha > 0 \ : \ M_f(R) \cdot \exp(-R^\alpha) \ \text{ ist beschränkt für } \ R > 0\}$$

die *Ordnung* von f.

Da f als holomorphe Funktion für $R_0 > 0$ auf dem Kompaktum $\overline{B_{R_0}(0)}$ beschränkt ist, genügt es die Ungleichung (1) für alle $R > R_0$ zu zeigen.

Dazu betrachten wir zunächst die

(1.1) Beispiele.

a) Ist f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung, so ist auch f' von endlicher Ordnung und es gilt

$$o(f) = o(f').$$

Wir zeigen die Aussage in mehreren Schritten.

<u>1. Schritt:</u> Es seien $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Da f eine Stammfunktion von f' ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(z)| - |f(0)| &\overset{\text{2. Dreiecksungl.}}{\leq} |f(z) - f(0)| \\ &= \Big| \int_{[0,z]} f'(t)dt \Big| \\ &\leq \Big| \int_{[0,z]} |f'(t)|dt \Big| \\ &\leq \sup\{|f'(t)| \ : \ t \in [0,z]\} \cdot |z|. \end{aligned} \tag{2}$$

Nach dem Maximumprinzip nimmt die Einschränkung von $|f'|$ auf $\overline{B_r(0)}$ ihr Maximum auf $\partial B_r(0)$ an. Dann ist

$$\begin{aligned} M_f(r) &= \max\{|f(z)| \ : \ |z| = r\} \\ &\overset{(2)}{\leq} \max\{\sup\{|f'(t)| \ : \ t \in [0,z]\} \cdot |z| + |f(0)| \ : \ |z| = r\} \\ &\overset{|z|=r}{=} r \cdot \max\{\sup\{|f'(t)| \ : \ t \in [0,z]\} \ : \ |z| = r\} + |f(0)| \\ &\leq r \cdot \max\{|f'(t)| \ : \ t \in \overline{B_r(0)}\} + |f(0)| \\ &= r \cdot \max\{|f'(t)| \ : \ |t| = r\} + |f(0)| \\ &= r \cdot M_{f'}(r) + |f(0)|. \end{aligned} \tag{3}$$

<u>2. Schritt:</u> Es seien $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| = r$. Dann folgt mit den Cauchy-Ungleichungen

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{1}{r} \cdot \max\{|f(\xi)| \ : \ |\xi - z_0| = r\} \\ &\overset{\text{Maximumprinzip}}{=} \frac{1}{r} \cdot \max\{|f(\xi)| \ : \ |\xi - z_0| \leq r\} \\ &\underset{|z_0|=r}{\overset{\text{2. Dreiecksungl.}}{\leq}} \frac{1}{r} \cdot \max\{|f(\xi)| \ : \ |\xi| \leq 2r\} \\ &\overset{\text{Maximumprinzip}}{=} \frac{1}{r} \cdot \max\{|f(\xi)| \ : \ |\xi| = 2r\}. \end{aligned}$$

Das impliziert

$$M_{f'}(r) \le \frac{1}{r} \cdot M_f(2r). \tag{4}$$

3. Schritt: Damit zeigen wir nun die Behauptung. Sei wieder $r > 0$ beliebig und f' von endlicher Ordnung mit $\kappa' := o(f')$. Es sei $\varepsilon_1 > 0$, dann existiert ein $c > 0$, sodass

$$\begin{aligned} M_f(r) &\overset{(3)}{\le} r \cdot M_{f'}(r) + |f(0)| \\ &\le r \cdot c \cdot \exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1}) + |f(0)| \\ &\le r \cdot c_1 \cdot \exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1}) + c_1 \\ &\le c_1 \cdot (r \cdot \underbrace{\exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1})}_{>1} + 1) \\ &\le c_1 \cdot (r+1) \cdot \exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1}), \end{aligned}$$

wobei $c_1 := \max\{c, |f(0)|\} > 0$. Weiterhin existiert zu $\varepsilon_2 > 0$ ein $c_2 > 0$, sodass für alle $r > 0$

$$r + 1 \le c_2 \cdot \exp(r^{\varepsilon_2}).$$

Somit erhalten wir

$$c_1 \cdot (r+1) \cdot \exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1}) \le c_1 \cdot c_2 \cdot \exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1} + r^{\varepsilon_2}) \le c_1 \cdot c_2 \cdot \exp(r^{\kappa'+\varepsilon_1+\varepsilon_2})$$

für ein geeignetes $R > 0$ und alle $r \ge R$. Da $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ beliebig waren, erhalten wir folglich

$$o(f) \le o(f').$$

Ist andererseits f von endlicher Ordnung mit $\kappa := o(f)$, so gibt es zu $\varepsilon_3 > 0$ ein $C > 0$, sodass für alle $r \ge 1$

$$\begin{aligned} M_{f'}(r) &\overset{(4)}{\le} \frac{1}{r} \cdot M_f(2r) \\ &\le \frac{C}{r} \cdot \exp((2r)^{\kappa+\varepsilon_3}) \\ &\le C \cdot \exp((2r)^{\kappa+\varepsilon_3}) \end{aligned}$$

gilt. Weiterhin existiert zu $\varepsilon_4 > 0$ ein $r_0 > 0$, sodass für alle $r \ge r_0$ gilt

$$(2r)^{\kappa+\varepsilon_3} \le r^{\kappa+\varepsilon_3+\varepsilon_4}.$$

Für alle $r \geq \max\{1, r_0\}$ gilt dann

$$M_{f'}(r) \leq C \cdot \exp(r^{\kappa+\varepsilon_3+\varepsilon_4}).$$

Da $\varepsilon_3 > 0$ und $\varepsilon_4 > 0$ beliebig waren, folgt $o(f') \leq o(f)$ und damit die Behauptung.

b) Wir wollen nun die Ordnung einer Potenzreihe bestimmen. Sei also f eine ganze Funktion, gegeben durch die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Wir verwenden folgende Abkürzung

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln(n)}{\ln\left(\frac{1}{|a_n|}\right)},$$

und zeigen, dass $\lambda = o(f)$ gilt. Da f eine ganze Funktion ist, ist insbesondere $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n < \infty$. Demnach ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. Wir dürfen also ohne Einschränkung $a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ annehmen.

„$\leq$" Ohne Einschränkung sei $\lambda > 0$, da $o(f) \geq 0$. Für $0 < c < \lambda$ ist nach Definition des Limes superior

$$I := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \ : \ \frac{n\ln(n)}{\ln\left|\frac{1}{a_n}\right|} \geq c \right\}$$

unendlich. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{n\ln(n)}{\ln\left|\frac{1}{a_n}\right|} &\geq c \\ \Leftrightarrow\ n\ln(n) &\geq -c\ln|a_n| \\ \Leftrightarrow\ \ln|a_n| &\geq -\frac{n\ln(n)}{c}. \end{aligned}$$

Mit den Cauchy-Ungleichungen erhält man für $r > 0$

$$|a_n r^n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n\right| \leq \max\{|f(\zeta)| \ : \ |\zeta| = r\} = M_f(r).$$

Das impliziert

$$\begin{aligned}\ln(M_f(r)) &\geq \ln|a_n| + \ln(r^n)\\ &\geq n\left(\ln(r) - \frac{\ln(n)}{c}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Wir wählen nun eine spezielle Folge $(r_n)_{n\in I}$, definiert durch

$$r_n = (n\cdot e)^{\frac{1}{c}}.$$

Dann gilt für alle $n \in I$

$$\begin{aligned}\ln\left(M_f(r_n)\right) &\overset{(5)}{\geq} n\left(\ln(r_n) - \frac{\ln(n)}{c}\right)\\ &= n\left(\frac{\ln(n\cdot e)}{c} - \frac{\ln(n)}{c}\right)\\ &= \frac{n}{c}(\ln(n) + 1 - \ln(n))\\ &= \frac{n}{c}\\ &= \frac{n}{c}\cdot\frac{r_n^c}{c\cdot e}\\ &= \frac{r_n^c}{c\cdot e}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$M_f(r_n) \geq \exp\left(\tfrac{r_n^c}{c\cdot e}\right).$$

Und schließlich gilt für ein beliebiges $0 < \varepsilon < c$

$$\begin{aligned}M_f(r_n)\cdot\exp\left(-\frac{r_n^{-(c-\varepsilon)}}{c\cdot e}\right) &\geq \exp\left(\frac{r_n^c}{c\cdot e} - \frac{r_n^{-(c-\varepsilon)}}{c\cdot e}\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{c\cdot e}(r_n^c - r_n^{-c+\varepsilon})\right)\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ und $c < \lambda$ beliebig waren, folgt $\lambda \leq o(f)$.

„$\geq$ “ Wir nehmen ohne Einschränkung $\lambda < \infty$ an, da sonst sofort $o(f) \leq \lambda$ folgt. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es nach Definition des Limes superior ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{n\ln(n)}{\ln|\frac{1}{a_n}|} \leq \lambda + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{n\ln(n)}{\ln|\frac{1}{a_n}|} &\leq \lambda + \varepsilon \\ \Leftrightarrow n\ln(n) &\leq -(\lambda+\varepsilon)\ln|a_n| \\ \Leftrightarrow \ln|a_n| &\leq -\frac{n\ln(n)}{\lambda+\varepsilon} \\ \Leftrightarrow |a_n| &\leq \exp\left(-\frac{n\ln(n)}{\lambda+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Für $z \in \partial B_r(0)$, $r > 1$ gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \\ &\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| r^n}_{\leq c_1 \cdot r^{n_0-1}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\ln(n)}{\lambda+\varepsilon}\right) r^n \\ &\leq c_1 \cdot r^{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\frac{n}{\lambda+\varepsilon}} r^n \end{aligned} \tag{6}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c_1 > 0$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{\lambda+\varepsilon}} r = 0$$

existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} n^{-\frac{n}{\lambda+\varepsilon}} r^n &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow n^{-\frac{1}{\lambda+\varepsilon}} r &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow n^{-\frac{1}{\lambda+\varepsilon}} &\leq \frac{1}{2r} \\ \Leftrightarrow n^{\frac{1}{\lambda+\varepsilon}} &\geq 2r \\ \Leftrightarrow n &\geq (2r)^{\lambda+\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_1. \end{aligned}$$

Wir wählen $n_1 := \lceil (2r)^{\lambda+\varepsilon} \rceil$. Dann gilt

$$(2r)^{\lambda+\varepsilon} \leq n_1 \leq (2r)^{\lambda+\varepsilon} + 1.$$

Es folgt für $\delta > 0$ beliebig

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\overset{(6)}{\leq} c_1 r^{n_0-1} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{n_1-1} n^{-\frac{n}{\lambda+\varepsilon}} r^n}_{\leq c_2 \cdot r^{n_1-1}} + \sum_{n=n_1}^{\infty} \underbrace{n^{-\frac{n}{\lambda+\varepsilon}} r^n}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\
&\leq c_1 \cdot r^{n_0-1} + c_2 \cdot r^{n_1-1} + 1 \\
&\leq c \cdot r^{n_1-1} \\
&= c \cdot e^{(n_1-1)\ln(r)} \\
&\leq c \cdot e^{(2r)^{\lambda+\varepsilon} \cdot \ln(r)} \\
&\leq c_\delta \cdot e^{(2r)^{\lambda+\varepsilon+\delta}}
\end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten c, c_2, $c_\delta > 0$, denn der natürliche Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz. Da $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig waren, folgt

$$o(f) \leq \lambda.$$ ◇

Bevor wir ein erstes Resultat beweisen, ein vorbereitendes

(1.2) Lemma.
Sei p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.$$

Beweis.
Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist

$$q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto p(z) - w$$

ebenfalls ein Polynom vom Grad n. Insbesondere ist q nicht konstant. Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt die Existenz eines $z = z(w) \in \mathbb{C}$, sodass

$$q(z) = 0.$$

Das impliziert

$$p(z) = w.$$

Damit ist p surjektiv und es folgt die Behauptung. □

Nun kommen wir zu dem angekündigten

(1.3) Satz.
f ist genau dann eine nicht-konstante ganze Funktion endlicher Ordnung ohne Nullstellen, wenn es ein nicht-konstantes Polynom p gibt mit

$$f(z) = e^{p(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

In diesem Fall gilt

$$o(f) = \deg(p).$$

Beweis.

„$\Leftarrow$" Sei p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f(z) = e^{p(z)} \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Da f auf $\mathbb{C}$ als Verkettung holomorpher Funktionen holomorph ist, ist f eine ganze Funktion. Nach Lemma (1.2) existieren $z, w \in \mathbb{C}$, sodass $p(z) = 0$ und $p(w) = \pi i$. Dann ist

$$f(z) = e^0 = 1 \quad \text{und} \quad f(w) = e^{\pi i} = -1.$$

Demnach ist f nicht konstant. Nach [1], II (2.2) ist f von endlicher Ordnung.

„$\Rightarrow$" Sei f ganz, nullstellenfrei, nicht konstant und von endlicher Ordnung. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, besitzt f nach [2], IV (4.6) einen holomorphen Logarithmus. Das heißt es existiert eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = e^{g(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Sei nun $\lambda > o(f)$. Nach Definition einer ganzen Funktion endlicher Ordnung gibt es ein $c > 0$, sodass

$$|f(z)| \leq c \cdot \exp(|z|^\lambda) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Mit der Monotonie der natürlichen Logarithmusfunktion folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(g(z)) &= \ln(e^{\mathrm{Re}(g(z))}) \\ &= \ln|e^{\mathrm{Re}(g(z))+i\cdot\mathrm{Im}(g(z))}| \\ &= \ln|e^{g(z)}| \\ &= \ln|f(z)| \\ &\leq \ln(c\cdot\exp(|z|^{\lambda})) \\ &= \ln(c)+|z|^{\lambda} \quad \text{für alle } z\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Nach [1], II (2.5) ist g ein Polynom mit $\deg(g)\leq\lambda$. Da $\lambda > o(f)$ beliebig, folgt

$$\deg(g)\leq o(f)$$

Es folgt nun mit [1], II (2.2)

$$o(f)=o(e^{g(z)})\leq\deg(g)\leq o(f)$$

Also gilt $o(e^{g(z)})=\deg(g)$, dies war noch zu zeigen. □

Als Folgerung formulieren wir das

(1.4) Korollar.
Sei f eine nicht-konstante, ganze Funktion von nicht-ganzzahliger Ordnung. Dann besitzt f unendlich viele Nullstellen.

Beweis.
Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, f hat nur endlich viele Nullstellen $a_1,\dots,a_n$, für ein $n\in\mathbb{N}$, mit Wiederholung gemäß Vielfachheit.
Definiere

$$p(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k) \quad \text{für } z\in\mathbb{C}.$$

Dann ist p ein Polynom vom Grad n. Die Funktion

$$g:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ z\mapsto\tfrac{f(z)}{p(z)}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{a_k\ :\ 1\leq k\leq n\}$ und nach [2], III (3.8) und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz auch eine ganze Funktion, insbesondere wohldefiniert.
g ist nullstellenfrei, denn

- Falls $w \in \mathbb{C} \setminus \{a_k \; : \; 1 \le k \le n\}$, sind $f(w) \neq 0$ und $p(w) \neq 0$. Damit ist $g(w) \neq 0$.
- Falls $w \in \{a_k : 1 \le k \le n\}$, wählen wir ohne Einschränkung $w = a_1$, $j \in \mathbb{N}$ sei die Vielfachheit der Nullstelle a_1 und $a_1 = \cdots = a_j$. Nach [2], III (3.8) existiert ein $r > 0$ und eine auf $B_r(a_1)$ holomorphe Funktion h mit $h(a_1) \neq 0$.
  Dann ist
$$g(w) = \frac{f(w)}{p(w)} = \frac{(w-a_1)^j \cdot h(w)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(w - a_k)} = \frac{h(w)}{\prod\limits_{k=j+1}^{n}(w - a_k)} \neq 0.$$

Die Funktion g ist nicht konstant, denn angenommen es gibt ein $c \in \mathbb{C}$, sodass $g(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist $f(z) = c \cdot p(z)$ ein Polynom und somit nach [1], II (2.2) $o(f) = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Sei nun $\alpha = o(f)$, das heißt zu beliebigem $R_0 > 0$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $c_0 > 0$, sodass

$$|f(z)| \le c_0 \cdot \exp(|z|^{\alpha+\varepsilon}) \quad \text{für alle } z \in \partial B_{R_0}(0).$$

Da p ein Polynom vom Grad n ist, gibt es zu diesem R_0 Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass

$$c_1 \cdot |z|^n \le |p(z)| \le c_2 \cdot |z|^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \ge R_0.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt dann

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{p(z)}\right| \le \left|\frac{f(z)}{c_1 \cdot |z|^n}\right| \le \left|\frac{f(z)}{c_1 \cdot {R_0}^n}\right| \le c \cdot \exp(|z|^{\alpha+\varepsilon}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \ge R_0,$$

wobei $c := \frac{c_0}{c_1 \cdot {R_0}^n}$. Somit ist g von endlicher Ordnung mit $o(g) \le \alpha$, da $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wegen $\alpha \notin \mathbb{Z}$ gilt $\alpha > 0$. Um $o(g) \ge \alpha$ zu zeigen, sei $0 < \varepsilon < \alpha$ beliebig. Weiterhin seien $\gamma > 0$ und $\delta > 0$, sodass $0 < \gamma < \varepsilon < \alpha$ und $0 < \delta < \alpha - \varepsilon$. Dann gibt es ein $R_0 > 0$, sodass für alle $R > R_0$ und $|z| = R$

$$R^{\alpha-\varepsilon} \le R^{\alpha-\gamma} - R^{\delta}$$

gilt. Das impliziert

$$e^{-R^{\alpha-\varepsilon}} \ge e^{-R^{\alpha-\gamma}} \cdot e^{R^{\delta}}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|g(z)|e^{-R^{\alpha-\varepsilon}} &= \left|\frac{f(z)}{p(z)}\right| e^{-R^{\alpha-\varepsilon}} \\
&\geq \frac{|f(z)|}{c_2|z|^n} e^{-R^{\alpha-\varepsilon}} \\
&\geq \underbrace{|f(z)|e^{-R^{\alpha-\gamma}}}_{\text{unbeschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{e^{R^\delta}}{c_2 R^n}}_{\to\infty}.
\end{aligned}$$

Also ist der der Ausdruck $|g(z)|e^{-R^{\alpha-\varepsilon}}$ für $R \to \infty$ unbeschränkt. Es folgt

$$o(g) \geq \alpha.$$

Damit können wir Satz (1.3) anwenden und erhalten ein Polynom q mit $\deg(q) \leq \alpha$, sodass

$$g(z) = e^{q(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Satz (1.3) liefert außerdem

$$o(g) = \deg(q) < \alpha,$$

denn $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Das ist ein Widerspruch zu $o(g) = \alpha$.
Es folgt die Behauptung. □

Bevor wir uns dem Produktsatz von WEIERSTRASS zuwenden können, müssen wir einen Konvergenzbegriff für unendliche Produkte einführen und zitieren zwei Resultate aus der Funktionentheorie ohne Beweis.

(1.5) Definition.
Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Das Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ heißt *konvergent*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

(i) $z_k \neq 0$ für alle $k \geq m$ und

(ii) die Folge $\left(\prod\limits_{k=m}^{n} z_k\right)_{n\geq m}$ gegen einen Wert in $\mathbb{C}^*$ konvergiert, den wir mit $\prod\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ bezeichnen.

Wir setzen dann

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k := \left(\prod_{k=1}^{m-1} z_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{\infty} z_k\right).$$

Ein konvergentes Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergiert also genau dann gegen 0, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $z_n = 0$ gilt.

(1.6) Beispiele.

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{k} \neq 0$, aber für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| \leq \tfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deswegen ist $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht konvergent.

b) Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ und $p > 0$ ist $\prod\limits_{k=0}^{\infty} p^{q^k}$ konvergent, denn wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man mit der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} p^{q^k} &= \prod_{k=0}^{n} \exp\left(q^k \cdot \ln(p)\right) \\ &= \exp\left(\ln(p) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k\right) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\ln(p) \cdot \frac{1}{1-q}\right) \\ &= p^{\frac{1}{1-q}}.\end{aligned}$$

◇

Zur kürzeren Schreibweise verwenden wir folgende Notation

$$E_0(s) := 1 - s, \quad E_n(s) := (1-s) \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}\right), \quad s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

(1.7) Lemma.
Für $q \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt

$$|1 - E_q(z)| \leq |z|^{q+1}.$$

(1.8) Lemma.
Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_k : U \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen. Wenn das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

holomorph. Dabei heißt $\prod_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut und lokal gleichmäßig konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k - 1)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Weiterhin gilt

$$\operatorname{ord}_a(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ord}_a(f_k) \quad \text{für alle } a \in U.$$

(1.9) Produktsatz von Weierstrass.
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^*$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{k\to\infty}|a_k| = \infty$. Weiter sei $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{N}_0$, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{q_k+1} < \infty \quad \text{für alle } R > 0.$$

Dann ist

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \ s \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} E_{q_k}\left(\frac{s}{a_k}\right)$$

eine ganze Funktion, die genau in den Stellen a_k, $k \in \mathbb{N}$ verschwindet und sonst nirgends. Falls $a \in \mathbb{C}^*$ und $|\{k \in \mathbb{N} \ : \ a_k = a\}| = m$, so gilt

$$\operatorname{ord}_a(f) = m.$$

Beweis.
Sei $R > 0$ fest. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \geq R$ für alle $k \geq k_0$. Für $|z| \leq R$ hat man dann

$$\left|\frac{z}{a_k}\right| \leq 1 \quad \text{und} \quad \left|1 - E_{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| \overset{(1.7)}{\leq} \left|\frac{z}{a_k}\right|^{q_k+1} \leq \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{q_k+1}$$

Damit konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|1 - E_{q_k}\left(\dfrac{z}{a_k}\right)\right|$ gleichmäßig auf $\overline{B_R(0)}$. Nach Lemma (1.8) ist mit E_{q_k} für $k \in \mathbb{N}$ auch

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \ z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} E_{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

eine ganze Funktion. Weil $z \mapsto E_{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)$ genau in $z_0 = a_k$ eine Nullstelle hat und zwar von erster Ordnung, gilt ebenfalls nach Lemma (1.8)

$$\operatorname{ord}_a(f) = |\{k \in \mathbb{N} \ : \ a_k = a\}| \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}.$$

Das ist die Behauptung. □

(1.10) Bemerkung.
Im Produktsatz von WEIERSTRASS erhält man die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|} \right)^{q_k+1}$$

zum Beispiel für $q_k = k - 1$.

Beweis.
Wähle zu $R > 0$ ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \geq 2R$ für alle $k \geq k_1$. Dann gilt $\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{k-1+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$ für alle $k \geq k_1$ und $\sum\limits_{k=k_1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ist nach der geometrischen Reihe eine konvergente Majorante. □

Als weitere Anwendung beweisen wir den

(1.11) Produktsatz von Hadamard.
Sei $f \not\equiv 0$ eine ganze Funktion von endlicher Ordnung $o(f) = \kappa$ und $\alpha = \lfloor \kappa \rfloor$. Sei $m = \operatorname{ord}_0(f)$ und seien $a_1, a_2, \ldots$ die Nullstellen von f in $\mathbb{C}^*$ mit Wiederholung gemäß Vielfachheit. Dann existiert ein Polynom p mit $\deg(p) \leq \alpha$, sodass

$$f(z) = e^{p(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{k \geq 1} E_\alpha \left(\frac{z}{a_k} \right) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Beweis.
Es gilt $\alpha + 1 > \kappa$. Für beliebiges $R > 0$ ist also die Reihe

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{R}{|a_k|} \right)^{\alpha+1} = R^{\alpha+1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{|a_k|^{\alpha+1}}$$

nach [1], II (2.4) konvergent. Damit können wir den Produktsatz von WEIERSTRASS (1.9) anwenden und erhalten eine ganze Funktion

$$h_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \prod_{k \geq 1} E_\alpha \left(\frac{z}{a_k} \right).$$

Da

$$h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^m$$

als Polynom eine ganze Funktion ist, ist auch

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^m \cdot \prod_{k \geq 1} E_\alpha \left(\frac{z}{a_k} \right)$$

als Produkt von h_1 und h_2 eine ganze Funktion und g hat die gleichen Nullstellen wie f.
Nach [2], III (3.8) und dem RIEMANNschen Hebbarkeitssatz ist $\frac{f}{g}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Es genügt zu zeigen, dass $\frac{f}{g}$ von endlicher Ordnung mit $o\left(\frac{f}{g}\right) \leq \kappa$ ist.
Satz (1.3) und dem zugehörigen Beweis entnimmt man die Existenz eines Polynoms p mit $\deg(p) \leq \kappa$ mit $\frac{f(z)}{g(z)} = e^{p(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $\deg(p) \in \mathbb{N}_0$, folgt $\deg(p) \leq \alpha$. Damit gilt die Behauptung.

Wir zeigen also noch, dass $\frac{f}{g}$ von endlicher Ordnung mit $o\left(\frac{f}{g}\right) \leq \kappa$ ist.
Dazu weisen wir nach, dass zu jedem $\beta > \kappa$ Zahlen γ, $c > 0$ existieren, sodass

$$|g(z)| \geq c \cdot e^{-\gamma \cdot R^\beta} \quad \text{für alle } |z| = R \text{ und eine Folge } R = R_\nu \to \infty.$$

Zunächst halten wir fest, dass

$$-|z| \leq -|\mathrm{Re}(z)| \leq \mathrm{Re}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Wir wählen ohne Einschränkung $m = 0$, denn sonst betrachten wir $z \mapsto f(z - a)$, mit $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{a_k \,:\, k \geq 1\}$.
Sei $\beta > \kappa$ beliebig. Weil $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{1}{|a_k|^\beta}$ nach [1], II (2.4) konvergiert, wird die positive reelle Achse durch

$$\left(B_{|a_k|^{-\beta}}(|a_k|) \right)_{k \geq 1}$$

nicht überdeckt, denn sonst wäre die reelle Achse in einem endlichen Intervall enthalten, da die Reihe, die die Radien der Kugeln aufsummiert, endlich ist. Also gibt es eine Folge $R = R_\nu \to \infty$ mit

$$|R - |a_k|| > |a_k|^{-\beta} \quad \text{für alle } k \geq 1. \tag{8}$$

Nur solche R betrachten wir und schätzen für $|z| = R$ ab. Wir unterscheiden drei Fälle.

<u>1. Fall:</u> $|a_k| \le \frac{1}{2}R$. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\left|E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| &= \left|\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\cdot\exp\left(\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right)\right| \\
&\overset{\text{2. Dreiecksungl.}}{\ge} \left(\underbrace{\left|\frac{z}{a_k}\right|}_{\ge\frac{R}{\frac{1}{2}R}=2} -1\right)\cdot\exp\left(\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right)\right) \\
&\overset{(7)}{\ge} 1\cdot\exp\left(-\left|\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right|\right) \\
&\overset{\text{1. Dreiecksungl.}}{\ge} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\alpha}\left|\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right|\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^n}{n}\right) \\
&\underset{\beta\ge\alpha}{\overset{\frac{R}{|a_k|}\ge\frac{R}{\frac{1}{2}R}\ge 1}{\ge}} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^\beta}{n}\right) \\
&= \exp\left(-\gamma\cdot\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^\beta\right)
\end{aligned}
$$

für $\gamma := \sum_{n=1}^{\alpha}\frac{1}{n}$ und alle $R = R_\nu$.

Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k:|a_k|\le\frac{1}{2}R} E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| &\ge \prod_{k:|a_k|\le\frac{1}{2}R} \exp\left(-\gamma\cdot\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^\beta\right)\\ &= \exp\left(-\gamma R^\beta\cdot\sum_{k:|a_k|\le\frac{1}{2}R}\frac{1}{|a_k|^\beta}\right)\\ &\ge \exp\left(-\gamma\delta R^\beta\right),\end{aligned} \tag{9}$$

wobei $0<\delta:=\sum_{k\ge1}\frac{1}{|a_k|^\beta}<\infty$.

<u>2. Fall:</u> $|a_k|\ge 2R$. Wir zeigen zunächst eine Ungleichung. Für die Funktionen

$$f:\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto e^{-2x}\qquad\text{und}\qquad g:\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto 1-x$$

gilt

$$f(0)=1=g(0)\qquad\text{und}\qquad f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{e}\le\tfrac{1}{2}=g(\tfrac{1}{2}).$$

Weiterhin ist g linear und f konvex, denn

$$f''(x)=4e^{-2x}>0\qquad\text{für alle } x\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right].$$

Demnach ist

$$f(x)\le g(x)\qquad\text{für alle } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]. \tag{10}$$

Man erhält $\left|\frac{z}{a_k}\right|=\frac{R}{|a_k|}\le\frac{R}{2R}=\frac{1}{2}$ und nach Lemma (1.7) sowie der 2. Dreiecksungleichung ist für $\kappa<\beta\le\alpha+1$

$$\begin{aligned}\left|E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| &\ge 1-\left|\frac{z}{a_k}\right|^{\alpha+1}\\ &\overset{(10)}{\ge} e^{-2\left|\frac{z}{a_k}\right|^{\alpha+1}}\\ &\overset{\left|\frac{z}{a_k}\right|\le\frac{1}{2}}{\ge} e^{-2\left|\frac{R}{a_k}\right|^{\beta}}.\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k:|a_k|\geq 2R} E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| &\geq \prod_{k:|a_k|\geq 2R} e^{-2\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^\beta} \\ &= \exp\left(-2R^\beta \cdot \sum_{k:|a_k|\geq 2R} \frac{1}{|a_k|^\beta}\right) \\ &\geq e^{-2\delta R^\beta} \end{aligned} \tag{11}$$

<u>3. Fall:</u> Für $\frac{1}{2}R < |a_k| < 2R$ mit $s := \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{2^n}{n}$ gilt wegen (8)

$$\begin{aligned}\left|E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| &= \left|1-\frac{z}{a_k}\right| \cdot \exp\left(\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\alpha} \frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right)\right) \\ &\overset{(7)}{\geq} \left|\frac{a_k - z}{a_k}\right| \cdot \exp\left(-\left|\sum_{n=1}^{\alpha} \frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right|\right) \\ &\overset{\text{Dreiecksungleichungen}}{\geq} \frac{||a_k|-|z||}{|a_k|} \cdot \exp\left(-\sum_{n=1}^{\alpha}\left|\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^n}{n}\right|\right) \\ &\overset{\left|\frac{z}{a_k}\right|\leq 2}{\geq} \frac{||a_k|-|z||}{|a_k|} \cdot e^{-s} \\ &\underset{R=|z|}{\overset{(8)}{\geq}} |a_k|^{-(\beta+1)} \cdot e^{-s} \\ &\overset{|a_k|\leq 2R}{\geq} (2R)^{-(\beta+1)} \cdot e^{-s}.\end{aligned}$$

Nach [1], II (1.12) gibt es $c_1, c_2 > 0$, sodass

$$\left|\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \tfrac{1}{2}R < |a_k| < 2R\right\}\right| \leq c_1 + c_2 \cdot \ln\left(M_f(2R)\right).$$

Da $\beta > \kappa$ ist, gibt es eine Konstante $c_3 > 1$, sodass

$$M_f(2R) \leq c_3 \cdot e^{(2R)^\beta}.$$

Damit gilt also

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \cdot \ln\left(M_f(2R)\right) &\le c_1 + c_2 \cdot \ln\left(c_3 \cdot e^{(2R)^\beta}\right) \\ &= c_1 + c_2 \cdot \ln\left(c_3\right) + c_2 \cdot (2R)^\beta. \end{aligned}$$

Definiere $c_4 := c_1 + c_2 \cdot \ln(c_3) > 0$. Dann gilt also

$$\left|\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \tfrac{1}{2}R < |a_k| < 2R\right\}\right| \le c_4 + c_2 \cdot (2R)^\beta.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left|\prod_{k: \frac{1}{2}R < |a_k| < 2R} E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| &\ge \prod_{k: \frac{1}{2}R < |a_k| < 2R} \underbrace{(2R)^{-(\beta+1)} \cdot e^{-s}}_{\le 1 \text{ nach Wahl von } R} \\ &\ge \left((2R)^{-(\beta+1)} \cdot e^{-s}\right)^{c_4 + c_2 \cdot (2R)^\beta} \\ &= \left(\exp\left(\ln\left((2R)^{-(\beta+1)}\right) - s\right)\right)^{c_4 + c_2 \cdot (2R)^\beta} \\ &= \exp\left((c_4 + c_2 \cdot (2R)^\beta) \cdot ((-(\beta+1)) \cdot \ln(2R) - s)\right) \\ &= \exp\left(-R^\beta \cdot \left(\frac{c_4}{R^\beta} + c_2 \cdot 2^\beta\right) \cdot ((\beta+1) \cdot (\ln(R) + \ln(2)) + s)\right) \\ &\ge \exp\left(-R^\beta \cdot (A + B \cdot \ln(R))\right) \qquad (12) \end{aligned}$$

für geeignete $A, B > 0$. Insgesamt ergibt sich aus (9), (11), (12) :

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |z|^m \cdot \prod_{k \ge 1}\left|E_\alpha\left(\frac{z}{a_k}\right)\right| \\ &\ge |z|^m \cdot \exp\left(-(\gamma\delta + 2\delta + A + B \cdot \ln(R))R^\beta\right) \\ &\ge c \cdot e^{-\rho R^{\beta+\varepsilon}} \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$ mit geeigneten $c, \rho > 0$.
Da $o(f) = \kappa$, gibt es zu $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ ein $c_0 > 0$, sodass $|f(z)| \le c_0 \cdot \exp(|z|^{\kappa+\varepsilon'})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$. Wir wählen ε' so, dass $\kappa + \varepsilon' > \beta + \varepsilon$ gilt. Weil $\beta > \kappa$ und $\varepsilon > 0$ beliebig sind, kann auch ε' beliebig klein gewählt werden. Aus der obigen

Abschätzung für $|g|$ erhält man damit nun

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| &\leq \frac{c_0 \cdot \exp(R^{\kappa+\varepsilon'})}{c \cdot \exp(-\rho R^{\beta+\varepsilon})} \\ &= \frac{c_0}{c} \cdot \exp(R^{\kappa+\varepsilon'} + \rho R^{\beta+\varepsilon}) \\ &= \frac{c_0}{c} \cdot \exp(R^{\kappa+\varepsilon'} \cdot (1 + \rho R^{\beta+\varepsilon-\kappa-\varepsilon'})).\end{aligned}$$

Da $\beta + \varepsilon - \kappa - \varepsilon' < 0$, folgt für $\varepsilon'' > 0$ und $R > 0$, das entsprechend groß gewählt wird,

$$\left|\tfrac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \tfrac{c_0}{c} \cdot \exp(R^{\kappa+\varepsilon'} \cdot (1+\rho)) \leq \tfrac{c_0}{c} \cdot \exp(R^{\kappa+\varepsilon'+\varepsilon''}).$$

Das impliziert $o\left(\frac{f}{g}\right) \leq \kappa$. Dies war noch zu zeigen. □

Vorbereitend auf den zweiten Paragraphen beweisen wir das

(1.12) Lemma.
Sei f eine ganze Funktion erster Ordnung mit Nullstellen $z_k \in \mathbb{C}^*$, $k \geq 1$, und Wiederholung gemäß Vielfachheit. Wenn die Reihe

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|z_k|}$$

konvergiert, gibt es ein $c > 0$, sodass

$$|f(z)| \leq e^{c\cdot|z|} \qquad \text{für alle } |z| \geq 1.$$

Man beachte, dass $f(0) = 0$ durchaus zugelassen ist, wir diese Nullstellen aber nicht als Summanden berücksichtigen.

Beweis.
Vorbemerkung: Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|(1-w)\cdot e^w| \leq (1+|w|) \cdot e^{\mathrm{Re}(w)} \overset{1+|x|\leq e^{|x|}}{\leq} e^{|w|} \cdot e^{|w|} = e^{2|w|}.$$

Da $o(f) = 1$, folgt $f \not\equiv 0$. Sei $m = \mathrm{ord}_0(f)$. Dann folgt aus dem Produktsatz von Hadamard (1.11) die Existenz von $A, B \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = e^{A+Bz} \cdot z^m \cdot \prod_{k \geq 1} E_1 \left(\frac{z}{z_k} \right) = e^{A+Bz} \cdot z^m \cdot \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{\frac{z}{z_k}}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Damit gilt für ein geeignetes $c > 0$ nach der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq e^{|A|+|B|\cdot|z|} \cdot |z|^m \cdot \prod_{k \geq 1} e^{2\left|\frac{z}{z_k}\right|} \\ &= e^{|A|+|B|\cdot|z|} \cdot |z|^m \cdot \exp\left(2|z| \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{1}{|z_k|} \right) \\ &= |z|^m \cdot e^{|A|} \cdot \exp\left(|z| \cdot \left(|B| + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{|z_k|} \right) \right) \\ &\leq e^{c\cdot|z|}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq 1. \end{aligned}$$

□

§2 Anwendungen auf die Riemannsche Zeta-Funktion

Unter anderem aus der Funktionentheorie sind sowohl die RIEMANNsche Zeta-Funktion

$$\zeta : \{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}, \ \ s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

als auch die komplexe Gamma-Funktion

$$\Gamma : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \ \ z \mapsto \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

bekannt, wobei

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

die rechte Halbebene bezeichne.
Nach [1], I (5.6) besitzt die RIEMANNsche Zeta-Funktion eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathcal{H}$. Die Fortsetzung ζ ist holomorph bis auf einen einfachen Pol in $s = 1$.
Die Γ - Funktion besitzt nach [1], II (3.1) eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Die Fortsetzung ist holomorph bis auf einfache Pole in den Punkten $s = -m$, $m \in \mathbb{N}_0$.
Die Funktion

$$\xi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \ \ s \mapsto \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\tfrac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$$

besitzt nach [1], II (4.12) eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$, die wir wieder mit ξ bezeichnen. Die Fortsetzung ist holomorph bis auf einfache Pole in $s = 0$ und $s = 1$ mit den Residuen $\mathrm{Res}_0(\xi) = -1$ und $\mathrm{Res}_1(\xi) = 1$. Es gilt die Integraldarstellung

$$\xi(s) = \tfrac{1}{s-1} - \tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{2} \int_1^{\infty} (\vartheta(y) - 1) \cdot \frac{(y^{\frac{s}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}})}{y} dy,$$

wobei $\vartheta(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} \geq e^0 = 1$. Die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe für $y \geq 1$ wird in der Funktionentheorie bewiesen.

Damit formulieren wir das

(2.1) Korollar.
Die Funktion

$$\xi^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto s(1-s) \cdot \xi(s)$$

ist eine ganze Funktion erster Ordnung.

Beweis.
Die Funktion ξ hat einfache Pole in $s = 0$ und $s = -1$. Nach [2], III (3.8) und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist ξ^* eine ganze Funktion.
Nach [1], II (4.15) ist ξ^* invariant unter der Transformation $s \mapsto 1-s$. Deshalb genügt es $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ zu betrachten, denn für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ gilt

$$\mathrm{Re}(1-s) = 1 - \mathrm{Re}(s) \geq 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Zunächst gilt für $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ und $y \geq 1$

$$\begin{aligned} |y^{\frac{s}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}}| &\leq |y^{\frac{s}{2}}| + |y^{\frac{1-s}{2}}| \\ &= |e^{\frac{s}{2}\ln(y)}| + |e^{\frac{1-s}{2}\ln(y)}| \\ &= e^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}\ln(y)} + e^{\frac{1-\mathrm{Re}(s)}{2}\ln(y)} \\ &\leq e^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}\ln(y)} + e^{\frac{1}{4}\ln(y)} \\ &= y^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}} + y^{\frac{1}{4}} \\ &\leq y^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}} + y^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}} \\ &= 2y^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}} \\ &\leq 2y^{\frac{|s|}{2}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\vartheta(y)$ für $y \geq 1$ gilt für $c_1 > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} \vartheta(y) - 1 - c_1 e^{-y} &= \lim_{y\to\infty} 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} - c_1 e^{-y} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y\to\infty} e^{-\pi n^2 y} - \lim_{y\to\infty} c_1 e^{-y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $y_0 > 1$, sodass für alle $y \in (y_0, \infty)$

$$\vartheta(y) - 1 - c_1 e^{-y} < \varepsilon.$$

Weiterhin existiert eine Konstante $c_2 > 0$, sodass für $y \in [1, y_0]$ gilt

$$\vartheta(y) - 1 - c_1 e^{-y} \le c_2.$$

Das impliziert

$$\vartheta(y) - 1 \le c_1 e^{-y} + c_2.$$

Wegen $e^{-y} \ge e^{-y_0}$, gibt es ein $c > 0$, sodass

$$\vartheta(y) - 1 \le c e^{-y}.$$

In beiden Fällen erhalten wir also die Existenz eines $c > 0$, sodass

$$\vartheta(y) - 1 \le c e^{-y}.$$

Da $0 \le \vartheta(y) - 1 \le c \cdot e^{-y}$ für alle $y \ge 1$, liefert die Integraldarstellung für ξ

$$\begin{aligned}
|\xi^*(s)| &\le |-s-(1-s)| + \frac{|s(s-1)|}{2} \int_1^\infty (\vartheta(y)-1) \cdot \frac{|y^{\frac{s}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}}|}{y} dy \\
&\le 1 + \frac{|s(s-1)|}{2} \cdot c \int_1^\infty e^{-y} \cdot \frac{|y^{\frac{s}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}}|}{y} dy \\
&\overset{(13)}{\le} 1 + |s(s-1)| \cdot c \int_1^\infty \underbrace{e^{-y} \cdot y^{\frac{|s|}{2}-1}}_{\ge 0} dy \\
&\le 1 + |s(s-1)| \cdot c \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{\frac{|s|}{2}-1} dy \\
&= 1 + |s(s-1)| \cdot c \cdot \Gamma\left(\frac{|s|}{2}\right).
\end{aligned}$$

Nach [1], II (3.10) gilt für $H\left(\frac{|s|}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|s|}{2}+k+\frac{1}{2}\right)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{\frac{|s|}{2}+k}\right) - 1$

$$\begin{aligned}\left|H\left(\frac{|s|}{2}\right)\right| &\leq \frac{1}{12\cdot\cos^2\left(\arg\left(\frac{|s|}{2}\right)\right)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}\\ &= \frac{4}{12\cdot\cos^2(0)}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Damit folgt für jedes $\varepsilon > 0$ mit [1], II (3.10) und geeigneten Konstanten $c_\varepsilon > 0$, abhängig von ε, und $\tilde{c} > 0$

$$\begin{aligned}|\xi^*(s)| &\leq 1 + |s(s-1)|\cdot c\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{|s-1|}{2}\cdot\ln\left(\frac{|s|}{2}\right)-\frac{|s|}{2}}\cdot e^{\frac{1}{3}}\\ &\leq \tilde{c}\cdot e^{\frac{|s-1|}{2}\ln\left(\frac{|s|}{2}\right)-\frac{|s|}{2}}\\ &\leq \tilde{c}\cdot e^{\frac{|s-1|}{2}\ln\left(\frac{|s|}{2}\right)}\\ &\leq c_\varepsilon\cdot e^{|s|^{1+\varepsilon}},\end{aligned}$$

da der natürliche Logarithmus langsamer wächst als jede Potenz. Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist ξ^* von endlicher Ordnung mit $o(\xi^*) \leq 1$.

Bevor wir die andere Richtung zeigen, halten wir fest: für $a_n := \frac{(4n-2)e^n n!}{n^n}$ gilt $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn

$$a_1 = 2\cdot e \geq 1$$

und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, da

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(4n-2)e^n n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(4n+2)e^{n+1}(n+1)!}\\ &= \underbrace{\frac{4n-2}{4n+2}}_{\leq 1}\cdot\frac{1}{e}\cdot\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\leq e}\\ &\leq 1.\end{aligned} \tag{14}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man mit $\Gamma(n) = (n-1)!$ und $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2n} \geq 1^{-2n} = 1$

$$\begin{aligned}
|\xi^*(2n)| &= 2n(2n-1) \cdot \Gamma(n) \cdot \pi^{-n} \cdot \zeta(2n) \\
&= (4n-2) \cdot n! \cdot \pi^{-n} \cdot \zeta(2n) \\
&\geq (4n-2) \cdot n! \cdot \pi^{-n} \\
&\overset{(14)}{\geq} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^n \\
&= e^{n(\ln(n)-\ln(\pi)-1)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Für $0 < \varepsilon \leq 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $c > 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned}
|\xi^*(2n)| \cdot e^{-(2n)^{1-\varepsilon}} &\geq e^{n(\ln(n)-\ln(\pi)-1)-(2n)^{1-\varepsilon}} \\
&\geq e^{c(n-n^{1-\varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist für $n \to \infty$ unbeschränkt. Es folgt $o(\xi^*) \geq 1$ und damit die Behauptung. □

(2.2) Korollar.
Seien s_k, $k \geq 1$ die Nullstellen von ξ^* mit Wiederholung gemäß Vielfachheit. Dann gilt

$$s_k \neq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq \mathrm{Re}(s_k) \leq 1 \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Die Reihe

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{|s_k|}$$

divergiert, aber

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{|s_k|^{1+\varepsilon}}$$

konvergiert für alle $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $B \in \mathbb{C}$, sodass

$$\xi^*(s) = -e^{B \cdot s} \cdot \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{s}{s_k}\right) e^{\frac{s}{s_k}} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

Beweis.
Nach [1], I (5.6) hat die Riemannsche Zeta-Funktion keine Nullstellen z mit $\mathrm{Re}(z) > 1$. Wegen der Produktdarstellung

$$\xi^*(s) = s(1-s) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s),$$

vergleiche hierzu Korollar (2.1) und die Einführung der Funktion ξ, hat ξ^* auch keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(z) > 1$, denn Γ ist nach [1], II (3.4) nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$, ebenso $s \mapsto \pi^{-\frac{s}{2}}$ und $s(1-s) \neq 0$ für alles $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Wegen der Invarianz von ξ^* unter der Transformation $s \mapsto 1-s$ hat ξ^* auch keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(z) < 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\xi^*(0) &= \lim_{s\to 0} s(1-s)\cdot\xi(s)\\ &= 1\cdot \mathrm{Res}_0(\xi)\\ &= -1 \neq 0.\end{aligned}$$

Würde $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{|s_k|}$ konvergieren, so existiert nach Lemma (1.12) ein $c > 0$, sodass

$$|\xi^*(s)| \leq e^{c\cdot|s|} \quad \text{für alle } |s| \geq 1.$$

Das widerspricht (15).

Die Konvergenz von $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{|s_k|^{1+\varepsilon}}$ folgt mit [1], II (2.4). Da nach Korollar (2.1) $o(\xi^*) = 1$ gilt, folgt mit dem Produktsatz von Hadamard (1.11) die Existenz von $A, B \in \mathbb{C}$ mit

$$\xi^*(s) = e^{A+B\cdot s}\cdot \prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{s}{s_k}\right)e^{\frac{s}{s_k}} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

Wegen $e^A = \xi^*(0) = -1$ folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe des Produktsatzes von Hadamard haben wir also die ganze Funktion ξ^*, die wir als Produkt meromorpher Funktionen eingeführt haben, als Produkt ganzer Funktionen dargestellt. Wegen der Darstellung

$$\xi^*(s) = s(1-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

und der Tatsache, dass

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \neq 0$$

und

$$\zeta(1) = 2^{1-0}\pi^{-0} \lim_{s\to 0} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2}\right) \zeta(0) = -\lim_{s\to 0} \Gamma(s) \neq 0,$$

vergleiche dazu [1], II (4.14), und der Nullstellenfreiheit von $s \mapsto \pi^{-\frac{s}{2}}$ und der Gamma-Funktion nach [1], II (3.4), sind die Nullstellen von ξ^* genau die nichttrivialen Nullstellen der RIEMANNschen Zeta-Funktion.
Die trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion sind nach [1], II (4.14) gegeben durch die Menge $\{-2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Literatur

[1] A. Krieg, *Analytische Zahlentheorie*, RWTH Aachen 2009

[2] A. Krieg, *Funktionentheorie I*, RWTH Aachen 2010