# Gaußsche Summe und die Theta-Reihe

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 25.06.2012

Jan Testrut

## §1 Gaußsche Summe

In diesem Paragrafen werden zunächst DIRICHLETsche Charaktere begrifflich erweitert und die neuen, sich daraus ergebenden Ergebnisse dargestellt. Anschließend wird die GAUSSsche Summe eingeführt und einige Resultate vorgeführt, die sich zumeist mit den besonderen Eigenschaften der DIRICHLETschen Charaktere ergeben(, welche ohnehin als Bestandteil der Definition weiterhin ein Rolle spielen).

**(1.1) Definition**
Sei $\chi$ ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod N$, $N \in \mathbb{N}$. Man nennt $M \in \mathbb{N}$ einen *induzierten Modul* von $\chi$, wenn $M|N$ und

$$\chi(m) = \chi(n) \text{ für alle } m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } m \equiv n \bmod M, \operatorname{ggT}(m, N) = \operatorname{ggT}(n, N) = 1.$$

Der kleinste induzierte Modul heißt *Führer* von $\chi$. Hat $\chi$ den Führer $N$, so spricht man von einem *primitiven* DIRICHLETschen Charakter $\bmod N$. ◇

Nun kann man sich die Frage stellen, ob jeder DIRICHLETsche Charakter einen Führer besitzt. Die Tatsache, dass ein DIRICHLETscher Charakter $\chi$ mod $N$ immer mindestens $N$ selbst als induzierten Modul hat, ergibt sich aus der Definition des DIRICHLETschen Charakters in Kap. I. Dazu ein Beispiel...

**(1.2) Beispiel**
a) Mit $p \in \mathbb{P}$ ist mithilfe des LEGENDRE-Symbols ein DIRICHLETscher Charakter mod $p$ definiert:

$$\chi_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, n \mapsto \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls ein } x \in \mathbb{Z} \text{ existiert mit } x^2 \equiv n \bmod p, p \nmid n, \\ -1, & \text{falls } p \nmid n \text{ und } \textbf{kein } x \in \mathbb{Z} \text{ existiert mit } x^2 \equiv n \bmod p, p \nmid n, \\ 0, & \text{falls } p \mid n. \end{cases}$$

Dabei sind die oberen Fälle Varianten von $\operatorname{ggT}(n, p) = 1$ entsprechend der Definition des DIRICHLETschen Charakters.

**Beweis**
Es sind die Eigenschaften aus [1] I, 6.8 nachzuweisen. (i) und (iii) sind unproblematisch. Zu (i): $\operatorname{ggT}(n,p) > 1 \overset{p\in\mathbb{P}}{\Leftrightarrow} p \mid n \Leftrightarrow \left(\frac{n}{p}\right) = 0$, zu (iii): Zu zeigen ist $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)$, falls $k \equiv n \bmod p$. Das ist jedoch klar, da falls $x^2 \equiv n \bmod p$ auch $x^2 \equiv k \bmod p$ gilt (und umgekehrt), wegen $k \equiv n \bmod p$ und der Transitivität.
Zu (ii): Zu zeigen ist:

$$\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right) \forall m,n \in \mathbb{Z}.$$

Für $m \equiv_p 0$ und $m \equiv_p 1$ ist die Aussage klar.
Es sei daher $p \neq 2$. $\mathbb{Z}_p$ ist ein Körper ($p$ Primzahl), daher ist $\mathbb{Z}_p^*$ zyklisch. Es existiert also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\langle k + p\mathbb{Z}\rangle = \mathbb{Z}_p^*$.
Es gilt:

$$m \equiv_p x^2 \text{ für ein } x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \equiv_p a^r \text{ für ein } r \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 2 \mid r.$$

Zu $m \equiv_p a^r$ mit $2 \mid r$, wähle man $x = a^{\frac{r}{2}}$.
Sei $m \equiv_p x^2$, dann ist $x + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_p^* = \langle a + p\mathbb{Z}\rangle$, also ist $x \equiv_p a^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.
Somit folgt:

$$m \equiv_p x^2 \equiv_p (a^k)^2 \equiv_p a^{2k}$$

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \equiv_p a^r$ und $m \equiv_p a^k$ ist also

$$mn \equiv_p a^{k+r} \equiv_p a^{2q} \text{ für ein } q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k + r \equiv_2 0.$$

Das heißt, dass $mn$ eine Quadratzahl $\bmod p$ genau dann ist, wenn $m$ und $n$ Quadratzahlen $\bmod p$ sind oder wenn $m$ und $n$ beide keine Quadratzahlen $\bmod p$ sind und im Umkehrschluss dass $mn$ keine Quadratzahl ist, genau dann wenn entweder nur $m$ oder nur $n$ eine Quadratzahl ist, was äquivalent zu

$$\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right) \forall m,n \in \mathbb{Z}$$

ist. □

b) Als Beispiel für einen DIRICHLETschen Charakter $\bmod N$ mit Führer 1 dient der Hauptcharakter $\chi_0$:

$$\chi_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \operatorname{ggT}(n,N) = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beweis**
Für $m, n$ gelte $\mathrm{ggT}(n, M) = \mathrm{ggT}(m, N) = 1$, dann folgt schon $\chi(m) = \chi(n) = 1$. $\square$

Um Unklarheiten zu vermeiden, schreiben wir den Hauptcharakter $\bmod M$ auch wie folgt:

$$\chi_0^{(M)} := \chi_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, M) = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod 6$ mit Führer 3 ist durch folgende Funktion gegeben:

$$\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 6, \\ -1, & \text{falls } n \equiv -1 \bmod 6, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beweis**
Für $m, n$ gelte $\mathrm{ggT}(n, M) = \mathrm{ggT}(m, N) = 1$, $m \equiv n \bmod 3$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$\chi(m) = \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \equiv n \equiv 1 \bmod 3, \\ -1, & \text{falls } m \equiv n \equiv -1 \bmod 3 \end{cases}$$

1 ist nicht Führer und 2 auch nicht, da $\chi(1) = 1 \neq -1 = \chi(5)$. ($1 \equiv 5 \bmod 1 (\bmod 2)$, $\mathrm{ggT}(1, 6) = \mathrm{ggT}(5, 6) = 1$.) $\square$

d) Sei $N = 5$, dann erhalten wir vier DIRICHLETsche Charaktere, von denen nur $\chi_1$ mit Führer 1 nicht primitiv ist. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist der primitive Charakter $\bmod 1$, der $\chi_1$ induziert $\psi(k) = 1$.

| | $2^0$ | $2^1$ | $2^3$ | $2^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $\chi_3$ | 1 | $i$ | $-i$ | $-1$ |
| $\chi_4$ | 1 | $-i$ | $i$ | $-1$ |

e) Sei $N = 6$, dann erhalten wir zwei DIRICHLETsche Charaktere:

$$\chi_1(6k) = \chi_1(6k+2) = \chi_1(6k+3) = \chi_1(6k+4) = 0$$
$$\chi_1(6k+1) = \chi_1(6k+5) = 1,$$
$$\chi_2(6k) = \chi_2(6k+2) = \chi_2(6k+3) = \chi_2(6k+4) = 0$$
$$\chi_2(6k+1) = 1 \chi_2(6k+5) = -1$$

Dabei ist nur $\chi_1$ nicht primitiv mit Führer 2. Der primitive induzierende DIRICHLETsche Charakter $\bmod 2$ ist $\psi(2k) = 0$, $\psi(2k+1) = 1$.

f) Sei N=8, dann gibt es dazu folgende DIRICHLETsche Charaktere (siehe auch [3]):

| | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_3$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $\chi_4$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |

$\chi_1$ und $\chi_4$ (Führer 4) sind nicht primitiv. Bzgl. $\chi_1$ s.o.. Der primitive induzierende DIRICHLETsche Charakter $\bmod 4$ zu $\chi_4$ ist $\psi(4k) = \psi(4k+2) = 0$, $\psi(4k+1) = 1$, $\psi(4k-1) = -1$, da gelten muss $\psi(3) = \chi_4(3) = -1$. $\diamond$

Nun stellen wir ein Lemma voran, dass wir im Beweis des darauffolgenden Satzes benötigen.

**(1.3) Lemma**
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ und $c \neq 0$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\mathrm{ggT}(a + xb, c) = 1.$$

$\diamond$

**Beweis**
Wir wählen $x$ wie folgt

$$x := \prod_{p \mid c, p \nmid a} p$$

Gilt $p \mid c, p \mid a \Rightarrow p \nmid x, p \nmid b, p \nmid xb \Rightarrow p \nmid a + xb$.
Andernfalls $p \mid c, p \nmid a \Rightarrow p \mid x \Rightarrow p \mid xb$. Aus $p \nmid a, p \mid xb$ folgt $p \nmid a + xb$. $\square$

**(1.4) Satz**
Sei $\chi$ ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod N$ und $\chi_0$ der Hauptcharakter $\bmod N$. Für $M \in \mathbb{N}$ mit $M \mid N$ sind äquivalent:

(i) M ist ein induzierter Modul von $\chi$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \equiv 1 \bmod M$ und $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$ gilt:

$$\chi(n) = 1.$$

(iii) Es gibt einen DIRICHLETschen Charakter $\psi$ mod $M$ mit

$$\chi = \chi_0 \cdot \psi.$$

In diesem Fall ist $\psi$ durch $M$ und $\chi$ eindeutig bestimmt.

Man nennt $\chi$ vom DIRICHLETschen Charakter $\psi$ induziert. ◇

**Beweis**
"(iii) ⇒ (i)" Sind $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m, N) = \text{ggT}(n, N) = 1$ und $m \equiv n \bmod M$, so folgt

$$\chi(n) = \chi_0(n) \cdot \psi(n) = \psi(n) \overset{[1]\,\underline{\text{I, 6.8}}}{=} \psi(m) = \chi_0(m) \cdot \psi(m) = \chi(m).$$

Also ist $M$ nach der Definition ein induzierter Modul von $\chi$. (*Beachte: Die Verknüpfung zweier DIRICHLETscher Charaktere ist definiert als das Produkt der Werte, sprich $(\chi \cdot \psi)(m) = \chi(m) \cdot \psi(m)$.)
Geht man von einer weiteren Darstellung $\chi = \chi_0 \cdot \psi^*$ mit einem beliebigen DIRICHLETschen Charakter $\psi^*$ mod $M$ aus, so betrachte man $m \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m, M) = 1$. Dafür gilt dann auch $\text{ggT}(m, M, N) = 1$, so dass nach dem vorausgegangenen Lemma ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$\text{ggT}(m + xM, N) = 1.^{++}$$

Es folgt

$$\psi^*(m) = \psi^*(m + xM) \overset{++\chi_0(m+xN)=1}{=} \chi(m + xM) = \psi(m + xM) = \psi(m),$$

also die Eindeutigkeit.

"(i) ⇒ (ii)" Mit $m = 1$ gilt $m \equiv n \bmod M$ und $\text{ggT}(n, N) = 1$, $\text{ggT}(m, N) = 1$, so dass nach der Definition gelten muss $\chi(n) = \chi(m)$. Nun wissen wir, dass $\chi(m) = \chi(1) = 1$ ist wegen des Gruppenhomomorphismus, also auch $\chi(n) = 1$.

"(ii) ⇒ (iii)" Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m, M) = 1$, dann gilt auch wieder $\text{ggT}(m, M, N) = 1$ und wieder lässt sich aufgrund des Lemmas ein $x \in \mathbb{Z}$ finden, so dass $\text{ggT}(n, N) = 1$, wobei $n = m + xM$. Nun definieren wir die Funktion $\psi$ und zeigen dann, dass die so gewählte Funktion wohldefiniert ist und die gesuchten Eigenschaften erfüllt:

$$\psi(m) := \chi(n) \text{ bzw. } \psi(k) = 0 \text{ für } \text{ggT}(k, M) > 1.$$

Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, nehmen wir eine zweite über $m$ gewonnene Darstellung(, die wir $n^*$ nennen) mit $\text{ggT}(n^*, N) = 1$. Weiter wählen wir $q \in \mathbb{Z}$

mit $qn \equiv 1 \bmod N$ (Lemma von Bezout). Nun lassen sich wegen $\mathrm{ggT}(q, M) \leq \mathrm{ggT}(q, N) = 1$ folgende Überlegungen anstellen:

$$n \equiv n^* \equiv m \bmod M \Leftrightarrow qn \equiv qn^* \equiv qm \bmod M$$

Außerdem gilt wegen $qn \equiv 1 \bmod N$ und $M \mid N$:

$$qn \equiv 1 \bmod M$$

Also insgesamt:

$$qn \equiv qn^* \equiv 1 \bmod M.$$

Wegen $\underline{qn \equiv 1 \bmod M}$, $\underline{qn^* \equiv 1 \bmod M}$ und $\underline{\mathrm{ggT}(qn, N) = 1}$ ($qn \equiv 1 \bmod N \Leftrightarrow qn = 1 + zN$), $\underline{\mathrm{ggT}(qn^*, N) = 1}$ ($\mathrm{ggT}(n, N) = 1$, $\mathrm{ggT}(qn, N) = 1 \Rightarrow \mathrm{ggT}(q, N) = 1$) gilt dann entsprechend der Voraussetzungen $\chi(qn) = \chi(qn^*) = 1$, so dass man die Wohldefiniertheit zeigen kann:

$$\chi(n) = \chi(n)\chi(qn^*) \overset{[1]\ \mathrm{I},\, 6.8}{=} \chi(qn)\chi(n^*) = \chi(n^*).$$

So wie wir $\psi$ definiert haben, ist es dann ein Dirichletscher Charakter mod $M$.

(i) $\psi(k) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(k, M) > 1$ : "$\Leftarrow$"klar. "$\Rightarrow$": $\psi(k) = 0 \Rightarrow \mathrm{ggT}(k, M) > 1$, denn sonst ex. $x$, so dass $\mathrm{ggT}(k + xM, N) = 1$, sprich $\psi(k) = \chi(k + xM) \neq 0$

(ii) $\psi(jk) = \psi(j) \cdot \psi(k)\ \forall j, k \in \mathbb{Z}$: Es gelte $\mathrm{ggT}(jk, M) = 1$, sprich $\mathrm{ggT}(j, M) = 1, \mathrm{ggT}(k, M) = 1$. (Alle anderen Fälle sind klar.) Dann erhalten wir

$$\psi(jk) = \chi(jk + zM), \text{ für geeignetes } z \in \mathbb{Z},$$
$$\psi(j) \cdot \psi(k) = \chi(j + xM) \cdot \chi(k + yM) = \chi((j + xM) \cdot (k + yM))$$

Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{ggT}((j + xM) \cdot (k + yM), N) = 1$ gilt.
Das folgt jedoch bereits aus $\mathrm{ggT}(j + xM, N) = 1$ und $\mathrm{ggT}(k + yM, N) = 1$.

(iii) $\psi(k) = \psi(n)$, falls $k \equiv n \bmod M$: Wir betrachten nur $0 \not\equiv k \equiv n \bmod M$, dann erhalten wir $k + xM$ wie oben dargestellt und insbesondere können wir $y$ so wählen, dass $n + yM = k + xM$. Der Rest ist klar.

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi_0(n) \cdot \psi(n) = \left\{ \begin{matrix} 0, & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, N) > 1, \\ \psi(n) = \chi(n), & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, N) = 1 \end{matrix} \right\} = \chi(n).$$

□

Man erhält als Umkehrung folgendes Korollar:

**(1.5) Korollar**
Für einen DIRICHLETschen Charakter $\chi$ mod $N$ sind äquivalent:

(i) $\chi$ ist primitiv.

(ii) Zu jeden $M \in \mathbb{N}$, $M \mid N$, $M < N$ gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, N) = \mathrm{ggT}(n, N) = 1$, $m \equiv n \bmod M$ und
$$\chi(m) \neq \chi(n).$$

(iii) Zu jedem $M \in \mathbb{N}$, $M \mid N$, $M < N$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$, $n \equiv 1 \bmod M$ und
$$\chi(n) \neq 1.$$
◇

Eine weitere Anwendung ist das nächste Korollar.

**(1.6) Korollar**
Sei $\chi$ ein DIRICHLETscher Charakter mod$N$ mit Führer $M$. Dann existiert ein DIRICHLETscher Charakter $\psi$ mod $M$ mit

$$\chi = \chi_0 \cdot \psi$$

$\psi$ ist eindeutig bestimmt und primitiv. ◇

**Beweis**
Der Satz 1.4 liefert uns bereits Existenz und Eindeutigkeit von $\psi$. Zu zeigen bleibt die Primitivität. Hätte $\psi$ einen Führer $M^* < M$, so gäbe es nach dem Satz 1.4 einen DIRICHLETschen Charakter $\psi^*$ mod $M^*$ mit

$$\psi = \chi_0^{(M)} \cdot \psi^*.$$

Also
$$\chi = \chi_0^{(N)} \cdot \psi = \chi_0^{(N)} \cdot \chi_0^{(M)} \cdot \psi^* \overset{(*)}{=} \chi_0^{(N)} \cdot \psi^*.$$
Das ist ein Widersprich zur Minimalität von M, da $\chi$ als Führer M hat und daher nicht als Verknüpfung des Hauptcharakters mod $N$ und eines DIRICHLETschen Charakters mod$M^*$ dargestellt werden kann, wenn $M^* < M$. Dafür müsste $M^*$ dann auch ein induzierter Modul sein, was nicht sein kann. (*): $M \mid N$: Aus $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$ folgt $\mathrm{ggT}(n, M) = 1$, aber aus $\mathrm{ggT}(n, N) > 1$ folgt nicht $\mathrm{ggT}(n, M)$, wohl aber gilt $\mathrm{ggT}(n, M) > 1 \Rightarrow \mathrm{ggT}(n, N) > 1$. Daher: $\chi_0^{(N)} = 0 \Rightarrow \chi_0^{(M)} = 0$. □

**(1.7) Definition**
Ist $\chi$ ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod N$ und $m \in \mathbb{Z}$, so nennt man

$$G(m,\chi) := \sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i m n/N}$$

die GAUSS*sche Summe* zu $\chi$ und $m$. Wir kürzen $G_\chi := G(1,\chi)$ ab. ◇

Zur Veranschaulichung dienen zwei Beispiele.

**(1.8) Beispiel**

a) Sei $\chi$ der DIRICHLETsche Charakter $\bmod 4$ mit $\chi(-1) = -1$ (siehe [1] I, 6.7). Dann gilt

$$\begin{aligned} G(m,\chi) = \sum_{n \bmod 4} \chi(n) e^{\pi i m n/2} &\overset{[2]}{=} e^{\pi i m/2} - e^{-\pi i m/2} = 2i \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \\ &\overset{[2]}{=} \chi(m) 2i. \end{aligned}$$

b) Sei $\chi(n) = \left(\frac{n}{3}\right)$ (Legendre-Symbol). Dann gilt

$$G(m,\chi) \overset{\chi(1)=1, \chi(2)=-1}{=} e^{2\pi i m/3} - e^{-2\pi i m/3} = 2isin\left(\frac{2\pi m}{3}\right) \overset{sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{=} \chi(m) i\sqrt{3}.$$ ◇

Nun leiten wir Aussagen über GAUSSsche Summen her.

**(1.9) Lemma**
Sei $\chi$ ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod N$. So gilt für alle
$m \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m,N) = 1$

$$G(m,\chi) = \overline{\chi}(m) \cdot G_\chi.$$ ◇

**Beweis**
Mit $n$ durchläuft auch $mn$ ein Vertretersystem $\bmod N$. Daher gilt

$$\begin{aligned} G(m,\chi) &= \sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i m n/N} \\ &\overset{1=|\chi(m)|=|\chi(m)|^2}{=} \chi(m) \cdot \overline{\chi}(m) \sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i m n/N} \\ &= \overline{\chi}(m) \sum_{n \bmod N} \chi(mn) e^{2\pi i m n/N} \\ &= \overline{\chi}(m) \sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i n/N} = \overline{\chi}(m) G_\chi. \end{aligned}$$ □

Die Formel dieses Lemmas gilt i. Allg. nicht für alle $m \in \mathbb{Z}$, denn

$$G(0,\chi) = \sum_{n \bmod N} \chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_0 \text{ (siehe [1] I, 6.5 a)),} \\ \varphi(N), & \text{falls } \chi = \chi_0 \end{cases}$$

**(1.10) Satz**
Sei $\chi$ ein primitiver Dirichletscher Charakter $\bmod N$. Dann gilt

a) $G(m,\chi) = \overline{\chi}(m) \cdot G_\chi$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

b) $G_\chi \cdot G_{\overline{\chi}} = \chi(-1)N$.

c) $|G(m,\chi)| = \sqrt{N}$, falls $\mathrm{ggT}(m,N) = 1$ ◇

**Beweis**
a) Wegen des vorherigen Lemmas verbleibt der Fall $\mathrm{ggT}(m,N) > 1$. Dann gilt

$$M := \frac{N}{\mathrm{ggT}(m,N)} < N,\ M \mid N.$$

Nach 1.5, (iii) existiert ein $r \equiv 1 \bmod M$ mit $\mathrm{ggT}(r,N) = 1$ und $\chi(r) \neq 1(, \chi(r) \neq 0)$(**). Mit den Rechenregeln für Kongruenzen ($m \neq 0$, $a \equiv b \bmod \frac{m}{\mathrm{ggT}(c,m)} \Leftrightarrow ca \equiv cb \bmod m$, Beweis:
$a \equiv b \bmod \frac{m}{\mathrm{ggT}(m,c)} \Leftrightarrow \frac{m}{\mathrm{ggT}(m,c)} \mid (b-a) \Leftrightarrow m \mid \mathrm{ggT}(c,m)(b-a) \Rightarrow m \mid c(b-a)$

$$m \mid c(b-a) \begin{cases} m \mid c \wedge m \nmid (b-a), & \Rightarrow m \mid \underbrace{\mathrm{ggT}((m,c)}_{=m}(b-a) \Rightarrow m/\mathrm{ggT}(m,c) \mid (b-a) \\ m \nmid c \wedge m \mid (b-a), & \Rightarrow m \mid c(b-a) \Rightarrow \frac{\mathrm{ggT}(m,c)c(b-a)}{\mathrm{ggT}(m,c)m} \in \mathbb{Z} \\ & = \underbrace{\frac{c}{\mathrm{ggT}(m,c)}}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{ggT}(m,c)(b-a)}{m}}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow m/\mathrm{ggT}(m,c) \mid (b-a) \end{cases}$$

) und aufgrund der passenden Definition von M erhalten wir:

$$rm \equiv m \bmod N$$

D.h. es existiert ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $m = rm + xN$. Insbesondere erhalten wir:
$e^{2\pi min/N} = e^{2\pi in(rm+xN)/N} = e^{2\pi inrm/N} \cdot \underbrace{e^{2\pi inx}}_{=1}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \chi(r)G(m,\chi) &= \sum_{n \bmod N} \chi(nr) e^{2\pi imn/N} \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{n \bmod N} \chi(nr) e^{2\pi irmn/N} \\ &= \sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi imn/N} = G(m,\chi). \end{aligned}$$

Also muss wegen (**) gelten:

$$G(m,\chi) = 0 = \overline{\chi}(m) \cdot G_\chi$$

b) Mit a) gilt:

$$\begin{aligned} G_\chi \cdot G_{\overline{\chi}} &= \sum_{n \bmod N} G_\chi \cdot \overline{\chi}(n) e^{2\pi i n/N} \overset{\text{a)}}{=} \sum_{n \bmod N} G(n,\chi) e^{2\pi i n/N} \\ &= \sum_{n \bmod N} \sum_{m \bmod N} \chi(m) e^{2\pi i n m/N} \cdot e^{2\pi i n/N} \\ &= \sum_{m \bmod N} \chi(m) \sum_{n \bmod N} \left(e^{2\pi i (m+1)/N}\right)^n . \end{aligned}$$

Falls $m+1 \not\equiv 0 \bmod N$, ist die letzte Summe über $n$ gleich 0, da nach der geometrischen Summenformel gilt: $\sum_{n \bmod N} \left(e^{2\pi i(m+1)/N}\right)^n = \frac{1-\left(e^{2\pi i(m+1)/N}\right)^{N-1+1}}{1-\left(e^{2\pi i(m+1)/N}\right)} = 0.$
Falls $m+1 \equiv 0 \bmod N$ ist die Summe $N$, da $e^{2\pi i k} = e^0 = 1$, sprich $N$-mal 1 addiert wird. Es folgt: $G_\chi \cdot G_{\overline{\chi}} = \chi(-1) \cdot N$, da $m = -1$ der einzige vorkommende Fall ist, bei dem die letzte Summe nicht null wird, sondern $N$, wie zuvor erklärt.

c) Es gilt $|\chi(m)| = 1$. Also mit a) und b)

$$\begin{aligned} |G(m,\chi)|^2 &= G(m,\chi) \cdot \overline{G}(m,\chi) \overset{\text{a)}}{=} \chi(m)\overline{\chi}(m) G_\chi \cdot \overline{G}_\chi \overset{(**)}{=} \chi(-1) G_\chi \cdot G_{\overline{\chi}} \\ &\overset{\text{b)}}{=} \chi(-1)\chi(-1) N \overset{[1]\ \text{I, 6.8}}{=} N. \end{aligned}$$

(**):

$$\begin{aligned} \chi(-1) \cdot G_{\overline{\chi}} &= \chi(-1) \cdot \sum_{n \bmod N} \overline{\chi}(n) e^{2\pi i n/N} \\ &= \sum_{n \bmod N} \overline{\chi}(-1)\overline{\chi}(n) e^{2\pi i n/N} \\ &= \sum_{n \bmod N} \overline{\chi(-n) e^{-2\pi i n/N}} = \overline{G}_\chi \end{aligned}$$

□

Nun noch ein Lemma zu Produkten DIRICHLETscher Charaktere.

**(1.11) Lemma**
Sei $\chi$ bzw. $\psi$ ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod N$ bzw. $\bmod M$ mit $\mathrm{ggT}(M,N) = 1$. Dann ist $\chi \cdot \psi$ ein DIRICHLETscher Charakter $\bmod MN$ und es gilt

$$G_{\chi\psi} = \chi(M)\psi(N) \cdot G_\chi G_\psi.$$

◇

**Beweis**
Durchläuft $m$ bzw. $n$ ein Vertretersystem $\bmod M$ bzw. $\bmod N$, so durchläuft

$$q = mN + nM$$

ein Vertretersystem $\bmod MN$. Denn da $M$ und $N$ teilerfremd sind, existieren $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass $1 = xM + yN \Leftrightarrow q = (qx)M + (qy)N$. Weiter sind $qx$, $qy$ wie folgt darstellbar: $qx = n + j_q N$, $qy = m + i_q M$. Also gilt

$$\begin{aligned} &q = (n + j_q N)M + (m + i_q M)N = nM + mN + (j_q + i_q)MN, \\ &nM + mN + (j_q + i_q)MN \equiv nM + mN \bmod MN \end{aligned}$$

$q$ lässt sich also so darstellen. $|\mathbb{Z}/MN\mathbb{Z}| = MN$, $|\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}| \cdot |\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}| = M \cdot N$, so dass sich jedes $q \in \mathbb{Z}/MN\mathbb{Z}$ darstellen lässt als $q \equiv mN + nM \bmod MN, m \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Eine Teilmenge von $\{mN + nM\}$ ist Vertretersystem von $\mathbb{Z}/MN\mathbb{Z}$.
Da $\{mN + nM\}$ höchstens $MN$ Elemente enthält, ist ein irreduzibles Vertretersystem schon durch diese Menge gegeben. Nun folgt

$$\begin{aligned} G_{\chi\psi} &= \sum_{q \bmod MN} (\chi\psi)(q) e^{2\pi i q/MN} \\ &= \sum_{m \bmod N, n \bmod N} \chi(mN + nM)\psi(mN + nM) e^{2\pi i (mN+nM)/MN} \\ &\overset{[1]\ \text{I, 6.8}}{=} \chi(M)\psi(N) \sum_{m \bmod M,\ n \bmod N} \chi(n)\psi(m) \cdot e^{2\pi i m/M} \cdot e^{2\pi i n/N} \\ &= \chi(M)\psi(N) \cdot G_\chi G_\psi. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \chi\psi(q) = \chi\psi(mN + nM) &= \chi(\underbrace{mN + nM}_{\equiv nM \bmod N}) \cdot \psi(\underbrace{mN + nM}_{\equiv mN \bmod M}) \\ &= \chi(nM)\psi(mN) = \chi(n)\chi(M)\psi(m)\psi(N), \end{aligned}$$

muss, wenn $\psi \cdot \chi$ ein Dirichletscher Charakter $\bmod MN$ sein soll, gezeigt werden, dass $\mathrm{ggT}(q, MN) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(nM, N) = 1 \wedge \mathrm{ggT}(mN, M) = 1$.
Zunächst gilt $\mathrm{ggT}(q, MN) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(q, N) = 1 \wedge \mathrm{ggT}(q, M) = 1$, und damit folgt schon das Gewünschte:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(mN + nM, N) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(N, nM) = 1 \\ \mathrm{ggT}(mN + nM, M) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(M, mN) = 1. \end{aligned}$$

Somit ist auch klar, dass $\mathrm{ggT}(q, MN) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(N, nM) = 1 \wedge \mathrm{ggT}(M, mN) > 1$ oder $\mathrm{ggT}(N, nM) > 1 \wedge \mathrm{ggT}(M, mN) = 1$ oder beide größer 1. Nachdem wir dies gezeigt haben, folgen alle restlichen Eigenschaften des DIRICHLETschen Charakters aus der Tatsachen, dass $\chi$ und $\psi$ bereits DIRICHLETsche Charaktere sind. □

# §2 Theta-Reihe

**(2.1) Definition**
Für $u, v \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im} z > 0\}$ nennt man

$$\Theta(u, v; z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+u)^2 z + 2\pi i (n+u) v}$$

die *Theta-Reihe* in $z$ zur Charakteristik $(u, v)$. ◇

Das Konvergenzverhalten von Theta-Reihen wird in dem folgenden Lemma beschrieben.

**(2.2) Lemma**
Die Theta-Reihe $\Theta(u, v; z)$ konvergiert absolut gleichmäßig in jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ und ist holomorph als Funktion von $u \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{H}$. ◇

**Beweis**
Sei $K \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ kompakt. Dann wählen wir ein $c > 0$ mit der Eigenschaft

$$|u| \leq c, \ |v| \leq c, \ |z| \leq c, \mathrm{Im} z \geq \frac{1}{c} \text{ für alle } (u, v, z) \in K$$

(Im$z$ ist als reellwertige stetige Funktion auf einem Kompaktum beschränkt.)
Sei $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2, z = x + iy$. Dann ist auch klar, dass gilt: $|u_1| \leq c$, $|u_2| \leq c$, $|v_1| \leq c$, $|v_2| \leq c$, $|x| \leq c, y \leq c$. Nun schätzen wir den Realteil des Exponenten ab. Man erhält für alle $(u, v, z) \in K$ mithilfe der vorausgegangen Überlegungen

$$\begin{aligned}
R :&= Re(\pi i (n+u)^2 z + 2\pi i (n+u) v) \\
&= Re(\pi i ((n+u)^2 + 2(n+u_1) i u_2 - u_2^2)(x+iy) + (2\pi i n + 2\pi i u_1 - 2\pi u_2)(v_1 + i v_2)) \\
&= -2(n+u_1) u_2 \pi x - \pi y (n+u_1)^2 + \pi u_2^2 y - 2\pi u_2 v_1 - 2\pi n v_2 - 2\pi u_1 v_2 \\
&= \pi(-y(n+u_1)^2 + y u_2^2 - 2x u_2 (n+u_1) - 2 v_2 (n+u_1) - 2 u_2 v_1) \\
&\leq \pi \left( -\frac{1}{c}(n+u_1)^2 + c^3 + 2c(c+1)\,|n+u_1| + 2c^2 \right).
\end{aligned}$$

Als Polynom vom Grad 1 existiert entsprechend der Wachstumsaussage aus Ana I ein $N \in \mathbb{N}$ (alternativ siehe [2], S. 55), so dass $\frac{1}{2}|n| \leq (n+u_1) \leq 2|n|$ für alle $|n| \geq N$ gilt. Wir können damit noch weiter abschätzen. Nun gilt
$R \leq \pi \left( \underbrace{-\frac{1}{c}\frac{1}{2^2}|n|^2 + 2c(c+1)2|n| + 2c^2 + c^3}_{:=R_1} \right)$. Für $N$ groß genug, wird $R_1$ für alle $|n| \geq N$ negativ. Auf dieses Polynom wenden wir nochmal die Wachstumsaussage an:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{4c}\cdot|n|^2\right| &\leq \left|-\frac{1}{4c}|n|^2 + 2c(c+1)2|n| + 2c^2 + c^3\right| \\
&= \frac{1}{4c}|n|^2 - 2c(c+1)2|n| - 2c^2 - c^3 \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{8c}\cdot|n|^2 &\geq -\frac{1}{4c}|n|^2 + 2c(c+1)2|n| + 2c^2 + c^3 \\
\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8c}\cdot|n|^2 &\geq \pi\left(-\frac{1}{4c}|n|^2 + 2c(c+1)2|n| + 2c^2 + c^3\right)
\end{aligned}$$

Es gilt noch $-\frac{1}{8c}\cdot|n|^2 \leq -\frac{1}{8c}\cdot|n|$, so dass

$$|e^z| = e^{Re(z)} \leq e^{-\frac{\pi}{8c}\cdot|n|}.$$

$e^{-\frac{\pi}{8c}} < 1$, so dass wir die geometrische Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(e^{-\frac{\pi}{8c}}\right)^{|n|}$ als Majorante erhalten und damit ebenfalls die absolut gleichmäßige Konvergenz auf K (nach Ana II). Mit diesem Ergebnis und aufgrund der Tatsache, dass jeder einzelne Summand der Reihe holomorph ist (exp ist ganze Funktion) ergibt sich nach dem Weierstrassschen Konvergenzsatz ([2] III, 5.1) die Holomorphie von $\Theta(u,v;z)$ als Funktion von $u, v, z$. □

Zentral ist jedoch das folgende Ergebnis

**(2.3) Satz**
Für alle $u, v \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Theta(-v,u;-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\cdot e^{-2\pi i u v}\cdot\Theta(u,v;z).$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für $z = iy$ positiv ist. ◇

**Beweis**
Für den Zweig der Wurzel stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, allerdings ist er durch die Vorgabe schon bestimmt, da wegen $y > 0$ gilt $\sqrt{\frac{iy}{i}} = \sqrt{y} > 0$. D.h. $\sqrt{\frac{z}{i}} = e^{\frac{1}{2}Log(z/i)}$.

Nach dem Identitätssatz kann man sich darauf beschränken, die Gleichheit der beiden Funktionen für $z = iy$ nachzuweisen, da beide auf $\mathbb{H}$ holomorph sind und die Menge $\{iy; y > 0\}$ einen Häufungspunkt besitzt. Sind $u \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ gegeben, so betrachtet man die ganze Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \varphi(v) := \Theta\left(-v, u; \frac{i}{y}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n-v)^2/y+2\pi i(n-v)u}$$

Da man wegen der absoluten Konvergenz umordnen darf, hat man

$$\varphi\,(v+1) = \varphi(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{C}.$$

Nach [2] V, 4.3 besitzt $\varphi$ eine FOURIER-Entwicklung

$$\varphi(v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_m e^{2\pi imv},$$

wobei für $m \in \mathbb{Z}$ wegen der absolut gleichmäßigen Konvergenz von $\varphi$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\alpha_m &= \int\limits_{[0;1]} \varphi(v) e^{-2\pi i m v}\, dv = \int\limits_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n-v)^2/y + 2\pi i(n-v)u - 2\pi i m v} \underbrace{e^{2\pi i m n}}_{=1}\, dv \\
&= \int\limits_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(v-n)^2/y - 2\pi i(v-n)u - 2\pi i m(v-n)}\, dv \\
&\overset{[2]\ \text{II}, 3.3}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 e^{-\pi(v-n)^2/y - 2\pi i(v-n)u - 2\pi i m(v-n)}\, dv \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2/y - 2\pi i v(u+m)}\, dv \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{v^2}{\sqrt{y}^2} + 2i\frac{v}{\sqrt{y}}\sqrt{y}(u+m) + i^2\sqrt{y}^2(m+u)^2 + (m+u)^2\sqrt{y}^2\right)}\, dv \\
&= e^{-\pi(m+u)^2 y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(v/\sqrt{y} + i\sqrt{y}(m+u))^2}\, dv \\
&\overset{t=\frac{v}{\sqrt{y}},\ dt=\frac{1}{\sqrt{y}}dv}{=} \sqrt{y}\cdot e^{-\pi(m+u)^2 y} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\sqrt{y}(m+u))^2}\, dt}_{=1\ ([2]\ \text{VI}, 3.9)} \\
&= \sqrt{y}\cdot e^{-\pi(m+u)^2 y}
\end{aligned}
$$

Also gilt mit

$$
\begin{aligned}
\Theta\left(-v, u; \frac{i}{y}\right) = \varphi(v) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sqrt{y}\cdot e^{-\pi(m+u)^2 y} e^{2\pi i m v} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sqrt{y}\cdot e^{-\pi(m+u)^2 y + 2\pi i m v (+2\pi i u v - 2\pi i u v)} \\
&= \sqrt{y}\cdot e^{-2\pi i u v} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(m+u)^2 y + 2\pi i v(m+u)} \\
&= \sqrt{y}\cdot e^{-2\pi i u v}\cdot \Theta(u, v; iy)
\end{aligned}
$$

die Behauptung. □

Wir betrachten den Spezialfall

$$\vartheta(y) := \Theta(0,0;iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 y}, y > 0,$$

und erhalten damit das Ergebnis von Euler.

**(2.4) Korollar**
Für alle $y > 0$ gilt

$$\vartheta\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt{y}\cdot\vartheta(y).$$

◇

**Beweis**

$$\vartheta\left(\frac{1}{y}\right) = \Theta\left(0,0;\frac{i}{y}\right) = \Theta\left(0,0;-\frac{1}{iy}\right) = \sqrt{\frac{iy}{i}}\Theta(0,0;iy) = \sqrt{y}\vartheta(y)$$

□

Weil die Theta-Reihe nach dem Lemma 2.2 lokal-gleichmäßig konvergiert, darf man gliedweise differenzieren und erhält

$$\Theta^*(u,v;z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+u)\cdot e^{\pi i(n+u)^2 z + 2\pi i(n+u)v} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial v}\Theta(u,v;z).$$

Wegen

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{2\pi iuv}\cdot e^{-\pi i(n-v)^2/z+2\pi i(n-v)u}\right) = \frac{1}{z}(n-v)\cdot e^{2\pi iuv}\cdot e^{-\pi i(n-v)^2/z+2\pi i(n-v)u}$$

folgt durch Differentiation beider Seiten in 2.3 das

**(2.5) Korollar**
Für alle $u,v\in\mathbb{C}$ und $z\in\mathbb{H}$ gilt

$$\Theta^*(-v,u;-\frac{1}{z}) = z\cdot\sqrt{z/i}\cdot e^{-2\pi iuv}\cdot\Theta^*(u,v;z).$$

◇

**Beweis**

$$\begin{aligned}
\Theta^*(u,v;z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial v}\Theta(u,v;z)\\
&\overset{\text{Satz 2.3}}{=} \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{z/i}}e^{2\pi iuv}\Theta(-v,u;-\frac{1}{z})\\
&= \frac{1}{\sqrt{z/i}}\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial v}e^{2\pi iuv}\Theta(-v,u;-\frac{1}{z})\\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{z/i}}e^{2\pi iuv}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-v)e^{-\pi i(n-v)^2/z+2\pi i(n-v)u}\\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{z/i}}e^{2\pi iuv}\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial u}\Theta(-v,u;-\frac{1}{z})\\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{z/i}}e^{2\pi iuv}\Theta^*(-v,u;-\frac{1}{z})\\
\Leftrightarrow \Theta^*(-v,u;-\frac{1}{z}) &= z\cdot\sqrt{z/i}\cdot e^{-2\pi iuv}\cdot\Theta^*(u,v;z)
\end{aligned}$$

□

**(2.6) Lemma**
Sei $\vartheta$ der Theta-Nullwert, also

$$\vartheta\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}, \tau\mapsto\Theta(0,0;\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau}$$

und $f$ definiert durch

$$f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C}, \tau\mapsto\vartheta^8(\tau)+\vartheta^8(\tau+1)+\tau^{-4}\cdot\vartheta^8(1-1/\tau).$$

Dann gilt

a) $\vartheta(\tau)+\vartheta(\tau+1) = 2\cdot\vartheta(4\tau)\ \forall\tau\in\mathbb{H}$,

b) $f(\tau+1) = f(\tau),\ f(-1/\tau) = \tau^4 f(\tau)\ \forall\tau\in\mathbb{H}$,

c) $\vartheta(1-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n+1/2)^2\tau}\ \forall\tau\in\mathbb{H}$. ◇

**Beweis**

1.

$$\vartheta(\tau)+\vartheta(\tau+1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2\tau}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2(\tau+1)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2\tau}(1+\underbrace{(-1)^n}_{e^{\pi in^2}})$$
$$=\ldots+0+2e^{\pi i4\tau}+0+2e^{\pi i16\tau}+0+2e^{\pi i36\tau}+\ldots$$
$$=2\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi i4n^2\tau}=2\cdot\vartheta(4\tau)$$

2. Zu zeigen:

$$\vartheta^8(\tau+1)+\vartheta^8(\tau+2)+(\tau+1)^{-4}\cdot\vartheta^8(1-\frac{1}{\tau+1})=\vartheta^8(\tau)+\vartheta^8(\tau+1)+\tau^{-4}\cdot\vartheta^8(1-1/\tau)$$
$$\overset{\vartheta^8(\tau+2)=\vartheta^8(\tau)}{\Leftrightarrow}(\tau+1)^{-4}\cdot\vartheta^8(1-\frac{1}{\tau+1})=\tau^{-4}\cdot\vartheta^8(1-1/\tau)$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^4\cdot\vartheta^8\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)=\vartheta^8\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)=\vartheta^8\left(\frac{-(\tau+1)+2\tau}{\tau}\right)$$

Und wegen $\vartheta^8\left(\frac{-(\tau+1)+2\tau}{\tau}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi in^2\frac{(\tau+1)}{\tau}}\underbrace{e^{2\pi in^2}}_{=1}$ gilt $\vartheta^8\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)=\vartheta^8\left(\frac{-(\tau+1)}{\tau}\right)$,

so dass

$$\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^4\cdot\vartheta^8\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)=\vartheta^8\left(\frac{-(\tau+1}{\tau}\right),$$

was wegen $i^4=1$ gerade die Theta-Transformationsformel aussagt. Für $f(-\frac{1}{\tau})=\tau^4f(\tau)$ ist zu zeigen:

$$\vartheta^8(-1/\tau)+\vartheta^8(-1/\tau+1)+\underbrace{\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{-4}}_{=\tau^4}\cdot\vartheta^8(1+\tau)=\tau^4\left(\vartheta^8(\tau)+\vartheta^8(\tau+1)+\tau^{-4}\vartheta^8(1-1/\tau)\right)$$
$$\Leftrightarrow\vartheta^8(-1/\tau)=\tau^4\vartheta^8(\tau),$$

was erneut die Aussage der Theta-Transformationsformel bestätigt.

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\tau/i}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n+1/2)^2\tau} &= \sqrt{\tau/i}\cdot\Theta(1/2,0;\tau)\\
&\overset{\text{Satz 2.3}}{=} \Theta(0,1/2;-1/\tau)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi i n^2 1/\tau+\pi i n}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi i n^2 1/\tau+\pi i n^2} = \Theta(0,0;1-1/\tau) = \vartheta(1-1/\tau)
\end{aligned}$$

□

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Krieg, Aloys: *Analytische Zahlentheorie*, Aachen 2009.
[2] Krieg, Aloys: *Funktionentheorie*, Aachen 2008.
[3] http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ws07/sft/v13ep.pdf