L-Reihen und Gaußsche Summen

von

Katharina Bosch

Dieter Moser

Seminar zur Funktionentheorie

Vortrag 1: 02.07.2012

Vortrag 2: 09.07.2012

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

In dieser Seminarausarbeitung werden wir Gaußsche Summen und L-Reihen behandeln. In den vorherigen Vorträgen wurden die Begriffe *Dirichletscher Charakter* sowie *L-Reihe* schon eingeführt. Mithilfe des Dirichletschen Charakters können wir nun die Gaußsche Summe definieren und in den ersten Sätzen, Korollaren und Lemmata einige Aussagen dazu zeigen. Desweiteren werden wir Bernoullische Polynome betrachten, die eine Verallgemeinerung der Bernoulli-Zahlen darstellen. Auch hierzu werden einige schöne Aussagen gezeigt und ein Zusammenhang zur Gaußschen Summe gezogen, indem man die *verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen* $B_{n,\chi}$ *bezüglich* χ definiert werden. Im zweiten Abschnitt der Ausarbeitung wird dann auf die L-Reihe eingegangen und einige Fortsetzungen sowie Funktionalgleichungen betrachtet. Dabei werden die Eigenschaften von primitvien Dirichletschen Charakteren extensiv verwendet. Zudem werden die analytischen Eigenschaften von Θ-Reihen und Γ-Funktionen genutzt. Über die gewonnen analytischen Eigenschaften, werden mithilfe der verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen L-Reihen an speziellen Stellen ausgerechnet.

1 Wiederholung

Zuerst werden wir einige Definitionen und wichtige Sätze der vorhergegangenen Kapitel und aus der Funktionentheorie wiederholen.

(1.1) Satz (Satz von WEIERSTRASS, III(5.1))

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f ebenfalls holomorph und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Funktionenfolge $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$ der k-ten Ableitungen ebenfalls lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$. ◇

(1.2) Satz (III(5.3))

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},\ a < b$. Wenn die Funktion $f : U \times (a, b) \to \mathbb{C}$ stetig ist und eine Funktion $M : (a, b) \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|f(z,t)| \leq M(t) \quad \text{für alle} \quad (z,t) \in U \times (a,b)$$

und das uneigentliche RIEMANN-Integral $\int_a^b M(t)\mathrm{d}t$ existiert, dann ist die Funktion

$$F : U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_a^b f(z,t)\mathrm{d}t,$$

stetig. Ist die Funktion $f : U \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z,t)$, für jedes $t \in (a, b)$ darüber hinaus holomorph und $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig, so ist auch F holomorph mit

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\mathrm{d}t. \qquad \diamond$$

(1.3) Definition (Gamma-Funktion)

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ definiert man die Gamma-Funktion durch:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t. \qquad \diamond$$

Dazu gehört der folgende Satz aus der Funktionentheorie.

(1.4) Satz

Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ besitzt eine Fortsetzung als meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Sie ist holomorph bis auf einfache Pole in $-m$, wobei $m \in \mathbb{N}_0$, mit dem Residuum

$$\mathrm{Res}_{-m}\Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Dabei ist die Gamma-Funktion gegeben als eine Partialbruchentwicklung

$$\Gamma(z) = \int\limits_1^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{1}{z+m},$$

wobei die Abbildung

$$z \mapsto \int\limits_1^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

eine ganze Funktion ist. ◇

(1.5) Lemma
Für die Gamma-Funktion gilt:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) (\pi n)^{-\frac{s}{2}} = \int\limits_0^\infty t^{s/2} e^{-\pi n t} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Beweis

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) (\pi n)^{-\frac{s}{2}} &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{\pi n}\right)^{\frac{s}{2}} e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\overset{t=y\cdot\pi n}{=} \int\limits_0^\infty y^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n y} \frac{\mathrm{d}y}{y}. \end{aligned}$$ □

Auch benötigt wird die Theta-Reihe und die Theta-Transformationformel.

(1.6) Definition (Theta-Reihe)
Für $u, v \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{H}$ nennt man

$$\Theta(u, v; z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi(n+u)^2 z + 2\pi i (n+u) v}$$

die Theta-Reihe in z zur Charakteristik (u, v). ◇

(1.7) Satz (Theta-Transformationsformel)
Für alle $u, v \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Theta(-v, u; -\frac{1}{z}) = \sqrt{z/i} \cdot e^{-2\pi i u v} \cdot \Theta(u, v; z).$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für $\tau = iy$ positiv ist. ◇

(1.8) Definition (Theta-Stern-Reihe)
Für $u, v \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{H}$ definiert man Θ^* durch

$$\begin{aligned}\Theta^*(u,v;u) :&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+u) \cdot e^{\pi i (n+u)^2 z + 2\pi i (n+u) v} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial v} \Theta(u,v;z).\end{aligned} \qquad \diamond$$

Dazu gehört die analoge Transformationsformel

(1.9) Satz
Für $u, v \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Theta^*\left(-v, u; -\frac{1}{z}\right) = z \cdot \sqrt{z/i} \cdot e^{-2\pi i u v} \cdot \Theta^*(u,v;z). \qquad \diamond$$

(1.10) Definition (MÖBIUSsche my-Funktion)
Die Möbiussche my-Funktion wird für $n = 1$ durch $\mu(1) = 1$ und für $n > 1$ durch

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } n = p_1 \dots p_k,\ p_i \in \mathbb{P} \text{ paarweise verschieden,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert. $\diamond$

(1.11) Definition (EULERsche phi-Funktion)
Die durch

$$\varphi(n) := \sharp\{k \in \mathbb{N} : \ 1 \leq k \leq n,\ \mathrm{ggT}(k,n) = 1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

definierte zahlentheoretische Funktion heißt die Eulersche phi-Funktion. $\diamond$

(1.12) Satz

a) Für die my-Funktion gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

b)

$$\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \varphi(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \diamond$$

(1.13) Lemma
Die Eulersche φ-Funktion ist multiplikativ und es gilt

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \qquad \diamond$$

(1.14) Definition (DIRICHLETscher Charakter)
$\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist ein Dirichletscher Charakter mod N, wobei $N \in \mathbb{N}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, N) > 1$ gilt: $\chi(n) = 0$. Zudem ist der Dirichletsche Charakter multiplikativ, also $\chi(m \cdot n) = \chi(m)\chi(n)$ und es gilt $\chi(1) = 1$. Daraus ergibt sich, dass $\chi(1) = \chi(-1 \cdot -1) = \chi(-1)^2 = 1$ und führt zu der Notation: χ heißt gerade, wenn $\chi(-1) = 1$ und ungerade, falls $\chi(-1) = -1$.
$M \in \mathbb{N}$ heißt induzierter Modul von χ, wenn folgendes erfüllt ist:

- $M|N$ und $M < N$.
- Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \equiv n \mod M$ und $\mathrm{ggT}(m, N) = \mathrm{ggT}(n, N) = 1$ gilt $\chi(m) = \chi(n)$.

Der *Führer* von χ ist der kleinste induzierte Modul. Wenn χ den Führer N hat, so heißt χ primitiver Charakter mod N. $\diamond$

Beispiele für Dirichletsche Charaktere mod N sind die folgenden drei:
(1.15) Beispiel

1. Der Hauptcharakter $\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathrm{ggT}(n, N) = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

2. $\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{es existiert ein } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } x^2 \equiv n \mod p \text{ und } p \nmid n, \\ 0, & p \mid n, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$

3. $\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 1 \mod N, \\ -1, & \text{falls } n \equiv -1 \mod N, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ $\diamond$

(1.16) Satz (I(6.10))
χ sei ein Dirichletscher Charakter mod N, dann gilt

$$\sum_{n \bmod N} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(N), & \text{falls } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_0. \end{cases} \qquad \diamond$$

(1.17) Korollar
Sei χ Dirichletscher Charakter mod N mit Führer M, $M \neq N$. Dann existiert ein Dirichletscher Charakter ψ mod M mit

$$\chi = \chi_0 \cdot \psi.$$

Dabei ist ψ eindeutig durch χ und N bestimmt und primitiv, hat also den Führer M.$\diamond$

Sehr bedeutend für die in der Arbeit behandelten Sätze ist die Definition der Gaußschen Summe, hierzu werden später einige Aussagen zu bewiesen.

(1.18) Definition (GAUSSsche Summe)
χ sei ein Dirichletscher Charakter mod N, $m \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir die Gaußsche Summe zu χ und m durch

$$G(m, \chi) := \sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i m n / N}.$$

Desweiteren gilt die Notation $G_\chi := G(1, \chi)$. $\diamond$

Einen Satz, den wir später noch benötigen, wollen wir auch noch zitieren.

(1.19) Satz
Sei χ ein primitiver Charakter mod N, dann gilt:

- $G(m, \chi) = \overline{\chi}(m) \cdot G_\chi$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.
- $G_\chi \cdot G_{\overline{\chi}} = \chi(-1) N$.
- $|G(m, \chi)| = \sqrt{N}$, falls $\mathrm{ggT}(m, N) = 1$. $\diamond$

Für das Bernoulli-Polynom verwenden wir die Bernoulli-Zahlen, deren Definition wie folgt ausschaut:

(1.20) Definition (Bernoulli-Zahlen)
Sei

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n z^n, \quad 0 < |z| < 2\pi,$$

dann heißen die B_n, $n \in \mathbb{N}_0$ die Bernoulli-Zahlen. $\diamond$

Damit wollen wir nun zum eigentlichen Inhalt der Ausarbeitung kommen, genauer zu einigen weiteren Aussagen zur Gaußschen Summe.

2 Gaußsche Summe und Bernoulli-Polynome

Wir beginnen dieses Kapitel direkt mit dem wohl technischstem und aufwendigstem Beweis zur Gaußschen Summe und werden danach zu den Bernoulli-Polynomen kommen. Das nun folgende Lemma behandelt nicht-primitive Dirichletsche Charaktere.

(2.1) Lemma

a) Sei ψ ein Dirichletscher Charakter mod M, zudem seien $m \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ mit $M|N$. Dann gilt

$$\sum_{n \bmod N} \psi(n) e^{2\pi i m n/N} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{N}{M} \nmid m, \\ \frac{N}{M} \cdot G(\frac{mM}{N}, \psi), & \text{falls } \frac{N}{M} \mid m. \end{cases}$$

b) Sei χ ein Dirichletscher Charakter mod N und ψ ein primitiver Dirichletscher Charakter mod M mit $\chi = \chi_0 \cdot \psi$, so erhalten wir für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$G(m, \chi) = G_\psi \cdot \sum_{d|\mathrm{ggT}(\frac{N}{M}, m)} d\mu\left(\frac{N}{Md}\right) \psi\left(\frac{N}{Md}\right) \overline{\psi}\left(\frac{m}{d}\right).$$

Für $g = \mathrm{ggT}\left(\frac{N}{M}, M\right)$ erhält man damit insbesondere die folgende Gleichheit:

$$G\left(\frac{N}{M}, \chi\right) = G_\psi \cdot g \cdot \varphi\left(\frac{N}{M}\right) / \varphi(g).$$ ◇

Beweis

Zu a): Durchlaufe ν ein Vertretersystem mod M und u ein Vertretersytem mod $\frac{N}{M}$, dann durchläuft $n = uM + \nu$ ein Vertretersystem mod N, denn:
u durchläuft $\{1, \dots, \frac{N}{M}\}$ und somit durchläuft uM das System $\{M, 2M, \dots, N\}$. Da ν das ein Vertretersystem mod M durchläuft, schließt es die Lücken und man erhält damit die Behauptung. Somit können wir die Summe über n mod N umschreiben in eine Summe über $(uM + \nu)$ mod N. Zudem beachte, dass $\psi(cM) = 0 \ \ \forall\, c \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} &\sum_{n \bmod N} \psi(n) e^{2\pi i m n/N} \\ &= \sum_{\nu \bmod M} \psi(\nu) e^{2\pi i m \nu/N} \cdot \sum_{u \bmod \frac{N}{M}} e^{2\pi i m u/(N/M)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{N}{M} \nmid m, \\ \frac{N}{M} \sum_{\nu \bmod M} \psi(\nu) e^{2\pi i (mM/N)\nu/M} = \frac{N}{M} \cdot G(\frac{mM}{N}, \psi), & \text{falls } \frac{N}{M} \mid m. \end{cases} \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da $\sum\limits_{n \bmod N} e^{2\pi imn/N} = \begin{cases} 0, & \text{falls } N \nmid m, \\ N, & \text{falls } N \mid m. \end{cases}$

Denn mit Hilfe der geometrischen Summe wissen wir für $N \nmid m$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi imn/N} = \frac{\overbrace{e^{2\pi imN/N} - 1}^{e^{2\pi im}-1=0}}{e^{2\pi imn/N} - 1} = 0$$

Für $N \mid m$ erhalten wir die Summe über 1 und somit $\sum\limits_{n \bmod N} e^{2\pi imn/N} = \sum\limits_{n \bmod N} 1 = N$.

Damit ist die Aussage aus a) gezeigt.

Zu b): Für die Umformungen werden mehrere Vorbemerkungen benötigt. Mit $M|N$ gilt:

$$\mathrm{ggT}(n, N) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(n, M) = \mathrm{ggT}(n, \frac{N}{M}) = 1 \tag{2}$$

Die Inklsion $\Rightarrow$ ist klar, zu der Rückrichtung: Sei $N = \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i}$. Da $\mathrm{ggT}(n, N) > 1$, muss n die Form $\prod_{j \in J} p_j^{\tilde{\alpha}_j} \cdot \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k}$ annehmen. Dabei ist $J \subset I$ und $K \cap I = \emptyset$. Wenn nun $\mathrm{ggT}(n, M) = 1$ gilt und $M|N$, dann bedeutet dies zum einen, dass $M = \prod_{j \in \tilde{J}} p_j^{\widehat{\alpha}_j}$ mit $\widehat{\alpha}_j \leq \alpha_j$ für $j \in \tilde{J} \subset I$, zum anderen, dass $J \cap \tilde{J} = \emptyset$, denn n und M haben keinen gemeinsamen Teiler, also teilen sie auch keinen Primfaktor. Dann muss aber $\mathrm{ggT}\big(n, \frac{N}{M}\big) > 1$ sein, denn: $\frac{N}{M} = \prod_{i \in I \setminus \tilde{J}} p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{j \in I \cap \tilde{J}} p_j^{\alpha_j - \widehat{\alpha}_j}$, also ist J eine Teilmenge von $I \setminus \tilde{J}$ und somit gibt es Primfaktoren, die von $\frac{N}{M}$ und von n geteilt werden. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\mathrm{ggT}\big(n, \frac{N}{M}\big) = 1$ sein muss. Also ist auch $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$.

Zudem haben wir die Gleichheit folgender Mengen

$$A := \left\{(n, d) : \ n \in \{1, \ldots, N\}, \ d|n, \ d|\frac{N}{M}\right\} = \left\{(dr, d) : \ d|\frac{N}{M}, \ r \in \{1, \ldots, \frac{N}{d}\}\right\} =: B \tag{3}$$

Dies wollen wir vorab noch kurz beweisen.

<u>$A \subset B$</u>: Sei $(n, d) \in A \Rightarrow n \in \{1, \ldots, N\}$ und $d|n$, sowie $d|(N/M)$. Damit erhalten wir $n/d \in \{1/d, 2/d, \ldots, N/d\}$ und es muss weiterhin $d|n$ gelten. Setze nun $n/d = r \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{1, \ldots, N/d\}$ und es gilt weiterhin $d|(N/M)$, also auch $d|N$, also ist $N/d \in \mathbb{N}$.

<u>$B \subset A$</u>: Nun haben wir $(dr, d) \in B$. Es gilt also $r \in \{1, \ldots, N/d\}$ und damit auch $dr \in \{d, \ldots, N\}$. Setze nun $dr = n$, dann erhalten wir $n \in \{d, \ldots, N\}$ also insbesondere auch $n \in \{1, \ldots, N\}$. Für $dr = n$ erhalten wir desweiteren $d|(dr) = n$ und haben somit auch diese Inklusion gezeigt.

Als drittes bemerken wir noch für den Dirichletschen Charakter mod M:

$$\psi(n) = 0 \text{ für } \mathrm{ggT}(n, M) > 1. \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
G(m,\chi) &= \sum_{n \bmod N,\, \mathrm{ggT}(n,N)=1} \psi(n) e^{2\pi i m n/N} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{n \bmod N} \sum_{d \mid \mathrm{ggT}(n, \frac{N}{M})=1} \mu(d)\psi(n) e^{2\pi i m n/N} \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{d \mid \frac{N}{M}} \sum_{r \bmod \frac{N}{d}} \mu(d)\psi(dr) e^{2\pi i m d r/N} \\
&= \sum_{d \mid \frac{N}{M}} \mu(d)\psi(d) \sum_{r \bmod \frac{N}{d}} \psi(r) e^{2\pi i m r/(N/d)} \\
&\overset{a)}{=} \sum_{d \mid \frac{N}{M}, \frac{N}{dM} \mid m} \mu(d)\psi(d) \cdot \frac{N}{dM} G\left(\frac{mdM}{N}, \psi\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{c \mid \mathrm{ggT}(\frac{N}{M}, m)} c\mu\left(\frac{N}{Mc}\right)\psi\left(\frac{N}{Mc}\right) G\left(\frac{m}{c}, \psi\right), \text{ wobei } c = \frac{N}{dM} \\
&\overset{(1.19)}{=} G_\psi \cdot \sum_{\substack{c \mid \mathrm{ggT}(\frac{N}{M}, m), \\ \mathrm{ggT}(\frac{N}{Mc}, M)=1}} c\mu\left(\frac{N}{Mc}\right)\psi\left(\frac{N}{Mc}\right)\overline{\psi}\left(\frac{m}{c}\right)
\end{aligned}
$$

Kurz zu $(*)$: Setze $c = \frac{N}{dM}$, dann erhalten wir unter der Summe: $c|m$ und $\frac{N}{cM}|\frac{N}{M}$. Letztes gilt insbesondere, wenn $c|\frac{N}{M}$. Zusammen ergibt dies dann $c|\mathrm{ggT}(\frac{N}{M}, m)$.
Damit ist der erste Teil aus b) gezeigt. Setze nun $m = \frac{N}{M}$, damit erhalten wir

$$
G\left(\frac{N}{M}, \chi\right) = G_\psi \cdot \sum_{c \mid \frac{N}{M},\, \mathrm{ggT}(\frac{N}{Mc}, M)=1} c\mu\left(\frac{N}{Mc}\right).
$$

Da wir die zweite Behauptung aus b) zeigen wollen, setzen wir $r = N/M$ und $g = \mathrm{ggT}(r, M)$ und es bleibt für alle $r \in \mathbb{N}$

$$
\sum_{c \mid r,\, \mathrm{ggT}(\frac{r}{c}, M)=1} \mu\left(\frac{r}{c}\right) c \overset{!}{=} \frac{g \cdot \varphi(r)}{\varphi(g)} \tag{5}
$$

zu zeigen. Wir definieren die Funktion $f_{M,r}(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } \mathrm{ggT}\left(\frac{r}{n}, M\right) = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Auf der linken Seite der Gleichung haben wir die my-Funktion $\mu(r)$ sowie die Abbildung $r \mapsto \mathrm{ggT}(r/n, M)$. Wenn wir die Summe umschreiben, steht dort

$$
\sum_{c \mid r} f_{M,r}(c)\mu\left(\frac{r}{c}\right)
$$

und wir haben somit eine Faltung zweier multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen, die ebenfalls multiplikativ ist. Auf der rechten Seite haben wir die phi-Funktion $\varphi(r)$, somit sind beide Seiten multiplikativ in r, also reicht es, Primzahlpotenzen zu betrachten. Dafür formen wir die Summe vorher noch um, damit wir über den ggT von c und M laufen können, was die spätere Rechnung vereinfacht. Wir beweisen im folgenden die Gleichheit

$$\sum_{c|r,\, \mathrm{ggT}(\frac{r}{c},M)=1} c\mu\left(\frac{r}{c}\right) = \sum_{\tilde{c}|r,\, \mathrm{ggT}(\tilde{c},M)=1} \frac{r}{\tilde{c}}\mu(\tilde{c}).$$

Wir summieren dabei über die gleichen Funktionen, allerdings mit verschiedenen Indizes. Also definieren wir, ähnlich wie im Beweis zu a), zwei Mengen

$$M_1 := \{\tilde{c} \in \mathbb{N} :\ \tilde{c}|r \text{ und } \mathrm{ggT}(\tilde{c}, M) = 1\}$$
$$M_2 := \left\{\frac{r}{c} \in \mathbb{N} :\ c|r \text{ und } \mathrm{ggT}\left(\frac{r}{c}, M\right) = 1\right\}$$

<u>$M_2 \subset M_1$</u>: Setze $\frac{r}{c} = \tilde{c}$, damit erhalten wir $c \cdot \tilde{c}|r \Rightarrow \tilde{c}|r$. Durch das setzen ergibt sich automatisch auch, dass der $\mathrm{ggT}(\tilde{c}, M) = 1$ ist. Also ist $\frac{r}{c} \in M_1$.
<u>$M_1 \subset M_2$</u>: Analog zum ersten Fall setze wieder $\tilde{c} = \frac{r}{c}$. Also ist $\frac{r}{c}|r \Rightarrow c|r$. $\mathrm{ggT}\big(\frac{r}{c}, M\big) = 1$ ergibt sich wieder direkt durch das setzen von $\tilde{c}$ als $\frac{r}{c}$.
Setzen wir nun $\tilde{c} = c$, dann müssen wir jetzt nur noch

$$\sum_{c|r,\, \mathrm{ggT}(c,M)=1} \frac{r}{c}\mu(c) \overset{!}{=} \frac{g \cdot \varphi(r)}{\varphi(g)}$$

zeigen. Dazu setzen wir

$$r = p^\alpha,\ g = p^\beta,\ p \in \mathbb{P},\ 0 \le \beta \le \alpha,\ \alpha \ge 1$$

<u>Fall 1</u>: $\beta = 0$
Dann ist $g = 1$ und zu zeigen bleibt: $\sum\limits_{c|r,\, \mathrm{ggT}(c,M)=1} \mu(c)\frac{r}{c} \overset{!}{=} \varphi(r)$. Da $\mathrm{ggT}(r, M) = 1 = g$, folgt wegen $c|r$, dass auch $\mathrm{ggT}(c, M) = 1$ gilt. Damit folgt mit Satz (1.12):

$$\sum_{c|r,\, \mathrm{ggT}(c,M)=1} \mu(c)\frac{r}{c} = \sum_{c|r} \mu(c)\frac{r}{c} \overset{(1.12)}{=} \varphi(r).$$

<u>Fall 2</u>: $\beta \ge 1$
$g = \mathrm{ggT}(r, M) > 1$, also wird M vo p geteilt und so ist $\mathrm{ggT}(c, M) > 1$ mit $c|r$. Es muss also nur über $c = 1$ summiert werden, damit erhalten wir auf der linken Seite p^α. Auf der rechten Seite berechnen wir:

$$\begin{aligned}\frac{p^\beta\varphi(p^\alpha)}{\varphi(p^\beta)} &= \frac{p^\beta(p^\alpha - p^{\alpha-1})}{p^\beta - p^{\beta-1}} \\ &= \frac{(p^\alpha - p^{\alpha-1})}{(p-1)/p} \\ &= \frac{p^\alpha(p-1)}{p-1} = p^\alpha\end{aligned}$$

Somit gilt auch hier die Gleichheit und wir haben b) gezeigt. $\square$

Aufbauend auf Satz (1.19) erhalten wir das folgende Korollar.

(2.2) Korollar

Für einen Dirichletschen Charakter χ gilt:

$$\chi \text{ ist primitiv} \Leftrightarrow G(m,\chi) = \overline{\chi}(m)G_\chi \text{ für alle } m \in \mathbb{Z}. \qquad \diamond$$

Beweis

" $\Rightarrow$ ": Siehe (1.19).

" $\Leftarrow$ ": Sei χ nicht primitiv, dann gibt es einen primitiven Charakter $\psi \mod M$ mit $\chi = \chi_0 \cdot \psi$, für $M|N, M < N$. Nach (2.1)b) gilt für $g = \mathrm{ggT}\left(\frac{N}{M}, M\right)$:

$$G\left(\frac{N}{M},\chi\right) = \frac{G_\psi \cdot g \cdot \varphi(N/M)}{\varphi(g)} \neq 0 = \overline{\chi}\left(\frac{N}{M}\right) \cdot G_\chi$$

Die Ungleichheit erhalten wir aufgrund der Tatsache, dass $G_\psi \neq 0$, vergleiche dazu Satz (1.19), denn sonst würde $0 = \chi(-1)N$ gelten. Der ggT sowie die phi-Funktion sind ebenfalls ungleich Null. Für die letzte Gleichheit siehe Beweis zu Satz(5.10)a) im Skript zur Analytischen Zahlentheorie. $\square$

Damit ist die allgemeine Theorie zur Gaußschen Summe abgeschlossen und wir wenden uns dem Thema der Bernoulli-Polynomen zu. Dazu zuerst die Definition der Bernoulli-Polynome, die eine Verallgemeinerung der Bernoulli-Zahlen darstellen.

(2.3) Definition

Die Bernoulli-Polynome sind definiert durch

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \in \mathbb{Q}[x]. \tag{6}$$

Dabei sind B_n die Bernoulli-Zahlen für $n \in \mathbb{N}$, siehe Definition (1.20). $\diamond$

Die Bernoulli-Polynome sind normiert, da der n-te Koeffizient $B_0 = 1$ ist.

(2.4) Beispiel

Mit den bekannten Werten für B_n, $n = 0, \dots, 3$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= B_0 = 1 \\
B_1(x) &= B_0 x + B_1 = x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= B_0 x^3 + 3B_1 x^2 + 3B_2 x + B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x
\end{aligned} \qquad \diamond$$

Wir wollen nun mehrere Aussagen für dieses Polynom zeigen.

(2.5) Satz

a) $B_n(0) = B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $\frac{d}{dx} B_n(x) = nB_{n-1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$ für $x \in \mathbb{C}$, $|t| < 2\pi$.

d) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

e) $B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f) $\sum_{k=0}^{N} k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} B_j \frac{N^{n+1-j}}{n+1-j}$. ◇

Beweis

a) Folgt direkt aus der Definition des Bernoulli-Polynoms, der einzige Koeffizient, welcher nicht wegfällt, ist der für $k = 0$, also B_n.

b) Da die Summe endlich ist, können wir die Ableitung mit der Summe vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} B_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} B_{n-k} x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} B_{n-k} x^{k-1} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} x^{k-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_{(n-1)-k} x^k = nB_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

c) Mit der Definition der Bernoulli-Zahlen können wir nun leicht rechnen, da beide Summen absolut konvergente Potenzreihenentwicklung für $0 < |t| < 2\pi$ sind und wir die

Cauchy-Produktregel anwenden können.

$$
\begin{aligned}
e^{xt}\frac{t}{e^t-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xt)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}B_{n-k}x^k t^{k+n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{n!}\frac{1}{k!(n-k)!}B_{n-k}x^k t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

d) Mit Hilfe des Ergebnisses aus c) berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}B_n(1-x)\frac{t^n}{n!} &\overset{c)}{=} \frac{te^{(1-x)t}}{e^t-1} \\
&= \frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{(-t)e^{x(-t)}}{e^{-t}-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(x)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Mit anschließendem Koeffizientenvergleich erfolgt das Ergebnis

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

e) Analog zu d) erhalten wir mit c):

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x+1)\frac{t^n}{n!} &\overset{c)}{=} \frac{te^{(x+1)t}}{e^t-1} \\
&= \frac{te^{xt}}{e^t-1} + te^{xt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t}{n!}(xt)^n \\
&= B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}t^n \\
&= B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n(x) + nx^{n-1})\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Durch erneuten Koeffizientenvergleich erhalten wir das gewünschte Ergebnis.
f) Für diesen Beweis benötigen wir drei Vorbemerkungen, und zwar gilt:

$$B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) \overset{e)}{=} B_{n+1}(k) + (n+1)k^n - B_{n+1}(k) = (n+1)k^n \tag{7}$$

$$B_{n+1}(N+1) = B_{n+1}(1-(-N)) \overset{d)}{=} (-1)^{n+1}B_{n+1}(-N) \tag{8}$$

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1-j)!j!} = \frac{n!}{(n-j)!j!} \cdot \frac{1}{n+1-j} \tag{9}$$

Damit berechnen wir nun unter Ausnutzung der Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k^n &\overset{(7)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)) \\
&= \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)) \\
&\overset{(8)}{=} \frac{1}{n+1}((-1)^{n+1}B_{n+1}(-N) - B_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}B_{n+1-k}N^k - B_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}B_jN^{n+1-j} - \frac{B_{n+1}}{n+1} \\
&\overset{(9)}{=} \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}B_j\frac{N^{n+1-j}}{n+1-j} - \frac{B_{n+1}}{n+1}(1+(-1)^n).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass $B_{n+1} = 0$ für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ und $(1-(-1)^n) = 0$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$. □

Nun wollen wir die Bernoulli-Zahlen und den Dirichletschen Charakter zusammenführen und definieren die verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen.

(2.6) Definition

Sei χ ein Dirichletscher Charakter mod N, dann definiert man die *verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen* $B_{n,\chi}$ bezüglich χ durch

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\chi(k)te^{kt}}{e^{Nt}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!} \quad \text{für } |t| < \frac{2\pi}{N}. \qquad \diamond$$

Einen Zusammenhang zu den Bernoulli-Polynomen beschreibt das folgende Lemma.

(2.7) Lemma

Sei χ ein Dirichletscher Charakter mod N, dann gilt

$$B_{n,\chi} = N^{n-1}\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)B_n\left(\frac{k}{N}\right)$$

und $B_{n,\chi}$ ist dabei aus $\mathbb{Q}(\chi(j), j \mod N)$. $\diamond$

Beweis
Mit Hilfe der Aussagen aus (2.5) und der Definition zeigt man einfach:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} &\overset{Def}{=} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N}{N} \cdot \frac{\chi(k) t e^{ktN/N}}{e^{Nt}-1} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\chi(k)}{N} \frac{(Nt) e^{(Nt)\cdot k/N}}{e^{Nt}-1} \\
&\overset{c)}{=} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\chi(k)}{N} \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{k}{N}\right) \frac{(tN)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} N^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_n\left(\frac{k}{N}\right) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung erfolgt wieder über einen Koeffizientenvergleich. $\square$

Bevor wir zu den L-Reihen übergehen, werden wir noch ein letztes Korollar zum Thema verallgemeinerte Bernoulli-Polynome zeigen.

(2.8) Korollar
Sei χ ein Dirichletscher Charakter mod N.

a) Es gilt

$$B_{0,\chi} = \begin{cases} \varphi(N)/N, & \text{falls } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

b) Gilt $\chi(-1) = 1$, also ist χ gerade, so folgt für die verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen

$$B_{n,\chi} = 0 \quad \text{für alle ungeraden } n \in \mathbb{N}.$$

c) Gilt $\chi(-1) = -1$, also ist χ ungerade, so folgt für die verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen

$$B_{n,\chi} = 0 \quad \text{für alle geraden } n \in \mathbb{N}_0. \qquad \diamond$$

Beweis
Zu a): Mit (2.3), (2.5) und (2.7) folgt schnell

$$\begin{aligned} B_{0,\chi} &= N^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_0\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= N^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \overset{(1.12)}{=} \begin{cases} \varphi(N)/N, & \text{falls } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zu b) und c): Mit (2.5) und der Tatsache, dass χ multiplikativ ist und $\chi(k+N) = \chi(k)$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} B_{n,\chi} &= N^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_n\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= N^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(N-k) B_n \underbrace{\left(\frac{N-k}{N}\right)}_{=1-\frac{k}{N}} \\ &\overset{d)}{=} (-1)^n N^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(N-k) B_n\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= \chi(-1)(-1)^n N^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_n\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= \chi(-1)(-1)^n B_{n,\chi}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann für b): $\chi(-1) = 1 \Rightarrow B_{n,\chi} = (-1)^n B_{n,\chi}$, also ist $B_{n,\chi} = 0$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$.
c) folgt dann analog. $\square$

3 Dirichletsche L-Reihen

Nach einer Einleitung durch Sebastian Schönitz, der unter anderem die Eulersche Produktentwicklung sowie die meromorphe Fortsetzung in die rechte Halbebene bewiesen hat, werden wir einige analoge Ergebnisse zu L-Reihen zeigen und vertiefen.

(3.1) Definition (Dirichletsche L-Reihe)
Sei χ ein Dirichletscher Charakter mod N, dann heißt

$$L(\chi, s) := D_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

die Dirichletsche L-Reihe zum Charakter χ. $\diamond$

(3.2) Lemma
Sei $\psi \bmod M$ ein primitiver Dirichletscher Charakter, welcher $\chi \mod N$ induziert, dabei gilt $M|N$. So erhalten wir

$$L(\chi, s) = \left(\prod_{p|N}(1-\psi(p)p^{-s})\right) \cdot L(\psi, s) \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1,$$

wobei dabei über $p \in \mathbb{P}$ multipliziert wird. $\diamond$

Beweis
Mit der Eulerschen Produktentwicklung haben wir

$$\begin{aligned}
L(\chi, s) &= \prod_{p}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = \underbrace{\prod_{p|N}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}}_{=1,\, \chi(p)=0 \text{ für } p|N} \cdot \prod_{p\nmid N}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \\
&= \prod_{p\nmid N}(1-(\chi_0 \cdot \psi)(p)p^{-s})^{-1} \overset{\mathrm{ggT}(p,N)=1}{=} \prod_{p\nmid N}(1-\psi(p)p^{-s})^{-1} \\
&= \prod_{p}(1-\psi(p)p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p|N}(1-\psi(p)p^{-s}) \\
&= \prod_{p|N}(1-\psi(p)p^{-s}) \cdot L(\psi, s).
\end{aligned}$$

$\square$

Nun eine Verallgemeinerung des Satzes I(6.13) für L-Reihen mit dem Dirichletschen Hauptcharakter χ_0.

(3.3) Korollar
Sei χ_0 der Hauptcharakter mod N und $N > 1$. dann besitzt die Dirichletsche L-Reihe

$$L(\chi_0, s) = \prod_{p|N}(1-p^{-s}) \cdot \zeta(s) \tag{10}$$

eine meromorphe Fortsetzung in ganz $\mathbb{C}$. Es gilt, dass $L(\chi_0, s)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{s\}$ ist mit Pol bei $s = 1$. Dort hat $L(\chi_0, s)$ das Residuum

$$\mathrm{Res}_{s=1} L(\chi_0, s) = \frac{\varphi(N)}{N}.$$

Dabei gilt außerdem

$$L(\chi_0, -2n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

$\diamond$

Beweis
Die Gleichheit (10) folgt aus (3.1) mit $\chi_0 = \chi_0 \cdot 1$. Der Satz I(4.14) besagt: $\zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einfachem Pol bei $s = 1$ und $\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s) = 1$. Zudem gilt:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir $L(\chi_0, -2n) = 0$. Weiterhin ist $s \mapsto \prod_{p|N}(1 - p^{-s})$ eine ganze Funktion, da $p \neq 0$, mit Nullstelle bei $s = 0$. Damit erhalten wir $L(\chi, 0) = 0$. Desweiteren gilt für das Residuum, was schon in dem Vortrag von Sebastian Schönitz gezeigt wurde:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{s=1} L(\chi_0, s) &= \prod_{p|N}(1 - p^{-s})|_{s=1} \cdot \underbrace{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s)}_{=1} \\ &= \prod_{p|N}(1 - p^{-1}) \\ &\overset{(1.13)}{=} \frac{\varphi(N)}{N}. \end{aligned}$$

□

Damit wäre der erste Teil über Gaußsche Summen und die Einleitung zu L-Reihen fertig und wir werden im folgenden dann die L-Reihen weiter vertiefen und uns Fortsetzungen als ganze Funktion sowie Funktionalgleichungen dazu anschauen. Da der erste Satz des zweiten Teils dieser Ausarbeitung einen langen Beweis hat, werden wir mit vorbereitenden Lemmata beginnen, um den anschließenden Beweis des Satzes zu vekürzen.

(3.4) Lemma
Für ein $k \in \{1, ..., N-1\}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(n + \frac{k}{N}\right)^{-s} + \left(n + \frac{N-k}{N}\right)^{-s} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\left(n + \frac{k}{N}\right)^2 \right)^{-\frac{s}{2}}. \tag{11}$$

◇

Beweis
Wir berechnen die einzelnen Summanden und beginnen mit $\left(n + \frac{k}{N}\right)^{-s}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{k}{N}\right)^{-s} \overset{n+k/N \geq 0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(n + \frac{k}{N}\right)^2 \right)^{-\frac{s}{2}}.$$

Zu zeigen bleibt noch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{N-k}{N}\right)^{-s} \overset{!}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\left(n + \frac{k}{N}\right)^2 \right)^{-\frac{s}{2}}. \tag{12}$$

Dazu:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1-\frac{k}{N}\right)^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n-\frac{k}{N}\right)^2\right)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{da } \forall n\geq 1 \text{ gilt } n-k/N>0$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right)^{-\frac{s}{2}}$$

somit erhalten wir die Behauptung. □

Die Θ-Reihen und Θ^*-Reihen, die uns später begegnen werden sind jeweils exponentiell fallend. Dieses Verhalten werden wir im folgenden Lemma zusammenfassen und beweisen.

(3.5) Lemma (Abschätzungen zur Θ-Reihe und Θ*-Reihe)
Es gibt $C_1, C_2, C_3, C_4 < \infty$, $\quad \forall k \in \{1, ..., N-1\}$ und $\chi_0 \neq \chi$ gelten die Abschätzungen:

a) $\Theta\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right)\cdot e^{\pi y/N^2} < C_1 \quad \text{für } y\in[1,\infty),$

b) $\sum_{k=1}^{N-1}\left(\chi(k)\,\Theta\left(0,-\frac{k}{N}; iy\right)\right)\cdot e^{y} < C_2 \quad \text{für } y\in[1,\infty)$

c) $\Theta^*\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right)\cdot e^{\pi y/N^2} < C_3 \quad \text{für } y\in[1,\infty),$

d) $\Theta^*\left(0,-\frac{k}{N}; iy\right)\cdot e^{y} < C_4 \quad \text{für } y\in[1,\infty).$ ◇

Beweis
Zu a):

$$\begin{aligned}
\Theta\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right)\cdot e^{\pi y/N^2} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi y\left(n+\frac{k}{N}\right)^2}\cdot e^{\pi y/N^2}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi y\left(\frac{1}{N^2}-\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi y\left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^2-\frac{1}{N^2}\right)}+\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi y\left(\left(n+1-\frac{k}{N}\right)^2-\frac{1}{N^2}\right)}\\
&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi y\left(\left(n+\frac{k^*}{N}\right)^2-\frac{1}{N^2}\right)} \quad \text{mit } k^*=\min\{k, N-k\}\geq 1
\end{aligned}$$

Wir wollen den Exponenten für $n \geq 1$ abschätzen:

$$\left(n + \frac{k^*}{N}\right)^2 - \frac{1}{N^2} = n^2 + \underbrace{2\frac{nk^* - 1}{N}}_{\geq 0} + \left(\frac{k^*}{N}\right)^2$$
$$\geq n^2 \geq n.$$

Damit erhalten wir

$$\Theta\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right) \cdot e^{\pi y/N^2} \leq 2e^{-\pi y\left(\left(0+\frac{k^*}{N}\right)^2 - \frac{1}{N^2}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi y n}$$
$$\leq 2 + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi y n} \overset{\text{Geom.Reihe}}{=} 2 + \frac{1}{1 - e^{-\pi y}} < \infty.$$

Zu b):

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\chi(k)\, \Theta\left(0, -\frac{k}{N}; iy\right)\right) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 y + 2\pi i n k/N}$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\pi n^2 y + 2\pi i n k/N} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) e^{2\pi i 0 k/N}}_{=0 \text{ da } \chi \neq \chi_0}$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} \left(e^{2\pi i n k/N} + e^{2\pi i - n k/N}\right)$$

Wir betrachten nun $|\sum_{k=1}^{N-1} \left(\chi(k)\, \Theta\left(0, -\frac{k}{N}; iy\right)\right) \cdot e^y|$,
wobei wir verwenden dass $\left|e^{2\pi i n k/N} + e^{2\pi i - n k/N}\right| \leq 2$.

$$\left|\sum_{k=1}^{N-1} \left(\chi(k)\, \Theta\left(0, -\frac{k}{N}; iy\right)\right) \cdot e^y\right| \overset{\triangle}{\leq} \underbrace{2\sum_{k=1}^{N-1} |\chi(k)|}_{:=\tilde{C}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y + y}$$
$$= \tilde{C} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{y(1-\pi n^2)} \leq \tilde{C} \frac{1}{1 - e^{-\pi y}} < \infty.$$

Analog zu a) können wir also wieder mit der geometrischen Reihe argumentieren und erhalten die Abschätzung nach oben, da $(1 - \pi n^2) < -n < 0$ für $n \geq 1$.

Zu c):

$$\begin{aligned}
\Theta^*\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n + \frac{k}{N}\right) e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\frac{d}{dy} e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)} \\
&= \frac{d}{dy} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)}
\end{aligned}$$

Der vorletzte Rechenschritt wird möglich, da $\left(n+\frac{k}{N}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Nach IV.66 (Jongenskript Analysis II) lässt sich Ableitung und Reihe vertauschen, falls die folgenden Voraussetzungen sind erfüllt

$$1) \quad \sum f_n' := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\frac{d}{dy} e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)} \quad \text{gleichmäßig konvergent}$$

$$2) \quad \sum f_n := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)} \quad \text{konvergent in mindestens einem Punkt}$$

1) wird erfüllt, da die Reihe Offensichtlich lokal gleichmäßig gegen Θ^* kovergiert. 2) wird durch die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)}\right| &= \left|\frac{e^{-\pi\left(\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(\frac{k}{N}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi\left(-n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{\pi\left(n-\frac{k}{N}\right)}\right| \\
&\leq \frac{N}{k\pi} + \frac{1}{\left(1-\frac{k}{N}\right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y} + e^{-\pi\left(n-\frac{k}{N}\right)^2 y} < \infty
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass f' exponentiell fällt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)}\right| \cdot e^{(\pi y/N^2)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y+\pi y/N^2}}{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)}\right| \\
&< \frac{N}{k\pi} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\left(n+\frac{k}{N}\right)^2 y+\pi y/N^2} \overset{\text{a)}}{<} \tilde{C}_3
\end{aligned}$$

Wir erkennen die Ungleichung aus a) wieder. Somit haben wir für den Ausdruck $\left(n+\frac{k}{N}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ exponentiell fallendes Verhalten gezeigt. Falls eine Funktion $|f(t)|$ exponentiell fällt und die Funktion folgende Form hat:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{-\pi y}\right)^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

so muss auch $f'(t)$ exponentiell fallen, da für y hinreichend groß gilt

$$\begin{aligned}
&|f(y)| < c_1 e^{-c_2 y} \\
&f'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\pi n y a_n \left(e^{-\pi y}\right)^n \\
\Rightarrow \quad &|f'(y)| < c_3 e^{-c_2 y}
\end{aligned}$$

Was zur Folge hat, dass auch $\Theta^*\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right)$ exponentiell fallendes Verhalten in y hat.
Zu d):

$$\begin{aligned}
\left|\Theta^*\left(0, -\frac{k}{N}; iy\right)\right| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n \cdot e^{-y\pi n^2 - 2\pi i n \frac{k}{N}}\right| \\
&< 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-y\pi n^2} \\
&< 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \frac{d}{dy} e^{-y\pi n^2} \\
&\leq 2 \cdot \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\pi n^2}
\end{aligned}$$

Auch hier kann man auf die vorherigen Abschätzung zurückkommen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\pi n^2} \cdot e^{(y)} \overset{\text{wie in b)}}{<} \tilde{C}_4$$

Womit d) analog zu c) folgt. $\square$

Die letzte Abschätzung die benötigt wird ist:

(3.6) Lemma
Sei χ ein Dirichletscher Charakter mod N und $N > 1$ so gilt:

$$\left|\sum_{k=R+1}^{\infty} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!}\right| \leq C \cdot y^{R+1} \quad \forall y \in (0, \frac{\pi}{N}).$$

Beweis

$$\left| \sum_{k=R+1}^{\infty} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \right| \leq C \cdot y^{R+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| y^{-(R+2)} \underbrace{\sum_{k=R+2}^{\infty} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!}}_{(*)} \right| \leq C$$

Der Reihe $(*)$ auf der linken Seite ist eine Teilsumme einer glm. konvergenten Reihe, die später in der Ausarbeitung als $F_\chi(y)$ bezeichnet wird. Da $(*)$ in 0 eine Nullstelle der Ordnung $R+2$ hat ist der gesamte Ausdruck im Betrag holomorph fortsetzbar, nimmt dementsprechend einen festen Wert in 0 an , was die Beschränktheit für alle $y \in (0, \frac{\pi}{N})$ liefert. $\square$

Quasi alle Holomorphieaussagen über L-Reihen können über das folgende Lemma gezeigt werden.

(3.7) Lemma

Sei $g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $|g(y)| < C_1 \cdot e^{-C_2 \cdot y}$, wobei $C_1, C_2 > 0$. So ist

$$F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , s \mapsto \int_1^\infty y^s g(y) \mathrm{d}y$$

eine ganze Funktion. $\diamond$

Beweis

Wir verwenden Satz 1.2.

Für alle $s \in \mathbb{C}$ existiert eine offene Menge U, so dass $s \in U$.

$f(s,t) := y^s \cdot g(y)$ holomorph in U für alle $y \in [1, \infty)$.

$$|y^s \cdot g(y)| < y^{Re(s)} \cdot C_1 \cdot e^{-C_2 \cdot y} =: M(y)$$

Offensichtlich ist $M(y)$ integrierbar und damit $F(s)$ holomorph in U. $\square$

Mit der Vorarbeit dieser Lemmata können wir nun Sätze über die analytischen Eigenschaften der L-Reihen in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Dirichletschen Charaktere beweisen. Dabei werden hauptsächlich primitive Charaktere betrachtet, da nach (3.2) L-Reihen mit nicht primitiven Dirichletschen Charakteren auf L-Reihen mit primitiven Dirichletschen Charakteren zurücktgeführt werden können.

(3.8) Satz
Sei χ ein primitiver Dirichletscher Charakter mod N und $N > 1$. Ist χ gerade, es gelte also $\chi(-1) = 1$, dann besitzt

$$\mathbb{L}(\chi, s) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(\chi, s)$$

eine Fortsetzung als ganze Funktion von s und genügt der folgenden Funktionalgleichung:

$$\mathbb{L}(\chi, s) = \frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \mathbb{L}(\overline{\chi}, 1 - s).$$

Dabei gilt $\mathbb{L}(\chi, s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ oder $\mathrm{Re}(s) \leq 0$.
$L(\chi, s)$ ist eine ganze Funktion mit trivialen Nullstellen

$$L(\chi, -2n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0. \qquad \diamond$$

Beweis
Wir betrachten zuerst s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Vorab betrachten wir $L(\chi, s)$:

$$\begin{aligned}
L(\chi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \\
&= \chi(1) + \chi(2)2^{-s} + \ldots + \chi(N)(N)^{-s} + \ldots + \chi(2N)(2N)^{-s} + \ldots \\
&= \chi(1) + \chi(2)2^{-s} + \ldots + \chi(N-1)(N-1)^{-s} + \chi(1)(2N+1)^{-s} + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \left[\chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (nN + k)^{-s} \right]
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $2L(\chi, s)$, beachte, dass $\chi(k) = \chi(N - k)$, da χ gerade:

$$\begin{aligned}
2L(\chi, s) &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left[\chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (nN + k)^{-s} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \left[\chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (k + nN)^{-s} + \underbrace{\chi(N-k)}_{=\chi(k)} \sum_{n=0}^{\infty} (N - k + nN)^{-s} \right]
\end{aligned}$$

Nun zur Berechnung von $2\mathbb{L}(\chi, s)$:

$$\begin{aligned}
2\mathbb{L}(\chi, s) &= \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) 2L(\chi, s) \\
&= \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \left[\chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(k+nN)^{-s} + \chi(k) \sum_{n=0}^{\infty}(N-k+nN)^{-s}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^{-s} + \left(n + \frac{N-k}{N}\right)^{-s}\right) \\
&\overset{(3.4)}{=} (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right]^{-\frac{s}{2}} \\
&= N^{-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \left[\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right]^{-\frac{s}{2}} \\
&\overset{(1.5)}{=} N^{-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\infty} y^{s/2} e^{-\pi y (n+k/N)^2} \frac{\mathrm{d}y}{y}.
\end{aligned}$$

Vorher möchten wir an dieser Stelle klären warum sich Integral und Summe vertauschen lassen. Nach dem Satz der majorisierten Konvergenz(*siehe z.B. Analysis 3 Foster Satz 2 §9*), benötigen wir für die konvergente Funktionenfolge f_n, mit Lebesgue-integrierbaren Gliedern, eine Lebesque integrierbare-Majorante F. Es muss also gelten:

$$|f_n| \le F \quad \forall n.$$

So können wir schliessen, dass der Grenzwert der Funktionenfolge Lebesgue-integrierbar ist. Unsere Funktionenfolge ist $f_k(y) = \sum_{n=-k}^{k} y^{s/2} e^{-\pi y(n+k/N)^2}$, da es integriert um eine endliche Summe von Γ-Funktionen handelt und $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist, erhalten wir die Lebesgue-Integrierbarkeit. Die Folge konvergiert gleichmäßig gegen die Θ-Funktion. Als Majorante erkennen wir eine Funktion der Form $c_1 y^{\mathrm{Re}(s)/2-1} e^{-c_2 y}$ mit $c_1, c_2 > 0$. Diese ist Lebesgue-integrierbar, da $\mathrm{Re}(s)/2 - 1 > -1$. Es lässt sich nun Summe und Integral vertauschen, da dies gleichbedeutend mit dem reinziehen des Limes der Partiallsummen ins Integral ist. Im Verlauf der Ausarbeitung wird auf diese Argumentation mit dem Symbol **VI** verwiesen.

$$
\begin{aligned}
2\mathbb{L}(\chi,s) &= N^{-\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)\int_0^\infty y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&= N^{-\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)\left[\int_0^1 y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}+\int_1^\infty y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}\right]
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nur das erste Integral:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} &\overset{y=\tilde{y}^{-1}}{=} -\int_1^\infty y^{-s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;\frac{i}{y}\right)y\cdot-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\\
&= \int_1^\infty y^{-s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;\frac{i}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&\overset{(1.7)}{=} \int_1^\infty y^{(1-s)/2}\Theta\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}
\end{aligned}
$$

So erhalten wir für $2\mathbb{L}(\chi,s)$ nun das gewünschte.

$$
2\mathbb{L}(\chi,s) = N^{-\frac{s}{2}}\int_1^\infty\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)\left[y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)+y^{(1-s)/2}\Theta\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)\right]\frac{\mathrm{d}y}{y}.
$$

Um zu zeigen, dass das Integral eine ganze Funktion ist verwenden wir Lemma (3.7). Das benötigten exponentiell fallende Verhalten erhalten wir aus Lemma (3.5):

$$
\frac{\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)}{e^{-\pi y/N^2}} < C_1 \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)\Theta\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)}{e^{-y}} < C_2,
$$

Damit haben wir die Fortsetzung zur ganzen Funktion gefunden und werden im Weiteren, den Ausdruck $\mathbb{L}(\chi,s)$ damit identifizieren. Nun betrachten wir den Fall $\mathrm{Re}(s) < -1$. Dafür benötigen wir auch zuerst eine kurze Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int_0^1 y^{-s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;-\frac{1}{iy}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&\overset{(1.7)}{=} \int_0^1 y^{(1-s)/2}\Theta\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Damit berechnen wir nun weiter

$$
\begin{aligned}
2\mathbb{L}(\chi,s) &= N^{-\frac{s}{2}} \int\limits_1^\infty \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \left[y^{s/2}\Theta\left(\frac{k}{N},0;iy\right) + y^{(1-s)/2}\Theta\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)\right] \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{(13)}{=} N^{-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \int\limits_0^\infty y^{(1-s)/2}\Theta\left(0,-\frac{k}{N};iy\right) \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{(1.6)}{=} N^{-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi ink/N} \int\limits_0^\infty y^{\frac{1-s}{2}} e^{-\pi y n^2} \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{(1.5)}{=} N^{-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \left(n^2\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2\pi ink/N}.
\end{aligned}
$$

Die Vertauschbarkeit von Integral und Summe ergibt ähnlich zu **VI**. Wir können den Fall $n=0$ mit derselben Rechnung wie in Lemma (3.5)b) rauslassen. Weiter gilt nun:

$$
\begin{aligned}
2\mathbb{L}(\chi,s) &= N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1}\chi(k) \left(\sum_{n=1}^\infty \left(n^2\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2\pi ink/N} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(n^2\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2\pi ink/N} \right) \\
&= N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{n=1}^\infty n^{s-1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \left(e^{-2\pi ink/N} + e^{2\pi ink/N}\right) \\
&= N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{n=1}^\infty n^{s-1} (G(-n,\chi)+G(n,\chi)) \\
&= 2\frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{n=1}^\infty \overline{\chi}(n) n^{s-1} \\
&= 2\frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \mathbb{L}(\overline{\chi},1-s),
\end{aligned}
$$

wobei man dabei beachten muss, dass

1. $N^{-s/2} = N^{(1-s)/2}\cdot N^{-1/2}$,
2. $G(-n,\chi) = G(n,\chi)$ und
3. $G(n,\chi) = \overline{\chi}(n)G_\chi$ für primitive Charaktere χ.

2. ergibt sich direkt aus der Voraussetzung, dass χ gerade ist, also $\chi(-n)=\chi(n)$ und $\{-N,\dots,-1\}$ ein Vertretersystem mod N ist. Damit haben wir die Funktionalgleichung gezeigt. Die Eulersche Produktentwicklung für $\mathrm{Re}(s)>1$ und die Gleichheit $L(\chi,1)\neq 0$

für $\chi \neq \chi_0$ ergeben die Nullstellenfreiheit für $\text{Re}(s) \geq 1$, für $\text{Re}(s) \leq 0$ liefert die Funktionalgleichung die Nullstellenfreiheit. Somit ist

$$L(\chi, s) = \left(\frac{\pi}{N}\right)^{s/2} \frac{1}{\Gamma(s/2)} \mathbb{L}(\chi, s)$$

ebenfalls eine ganze Funktion. Laut (1.4) besitzt $\Gamma(s/2)$ seine Pole bei $s = -2n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, dies liefert uns die Nullstellen für $L(\chi, s)$. □

Wir hatten im vorigen Satz gerade χ betrachtet. Nun schauen wir uns einen ähnlichen Satz mit ungeraden χ an.

(3.9) Satz

Sei χ ein primitiver Dirichletscher Charakter mod N, $N > 1$ und χ sei ungerade, das heißt $\chi(-1) = -1$. Dann besitzt

$$\mathbb{L}(\chi, s) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(\chi, s)$$

eine Fortsetzung als ganze Funktion von s und genügt der Funktionalgleichung

$$\mathbb{L}(\chi, s) = \frac{-iG_\chi}{\sqrt{N}} \mathbb{L}(\overline{\chi}, 1-s).$$

Dabei gilt $\mathbb{L}(\chi, s) \neq 0$ für $\text{Re}(s) \geq 1$ oder $\text{Re}(s) \leq 0$.
$L(\chi, s)$ ist eine ganze Funktion mit trivialen Nullstellen

$$L(\chi, 1-2n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \diamond$$

Beweis

Wir werden die einzelnen Schritte nun nicht mehr so ausführlich kommentieren, da sie größtenteils analog zum vorherigen Beweis erfolgen.
Da χ ungerade, gilt hier $\chi(k) = -\chi(N-k)$ und somit erhalten wir für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$
\begin{aligned}
2\mathbb{L}(\chi, s) &= \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \left[\chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (k+nN)^{-s} + \chi(N-k) \sum_{n=0}^{\infty} (N-k+nN)^{-s}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n+\frac{k}{N}\right)^{-s} - \left(n+\frac{N-k}{N}\right)^{-s}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{k}{N}\right)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(n-\frac{k}{N}\right)^{-s}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \\
&\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{k}{N}\right) \left(n+\frac{k}{N}\right)^{-s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{N}-n\right) \left(n-\frac{k}{N}\right)^{-s-1}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \\
&\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{k}{N}\right) \left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right)^{\frac{-s-1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{N}-n\right) \left(\left(n-\frac{k}{N}\right)^2\right)^{\frac{-s-1}{2}}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \\
&\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{k}{N}\right) \left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right)^{\frac{-s-1}{2}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{k}{N}+n\right) \left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right)^{\frac{-s-1}{2}}\right] \\
&= (\pi N)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n+\frac{k}{N}\right) \left(\left(n+\frac{k}{N}\right)^2\right)^{\frac{-s-1}{2}}\right] \\
&\overset{(1.5)}{=} (N)^{-\frac{s}{2}} \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\infty} y^{(s+1)/2} \left(n+\frac{k}{N}\right) e^{-\pi(n+k/N)^2 y} \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{(1.8)}{=} N^{-\frac{s}{2}} \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \int_0^{\infty} y^{\frac{s+1}{2}} \Theta^*\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right) \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{(1.9)}{=} N^{-\frac{s}{2}} \sqrt{\pi} \int_1^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \left[y^{\frac{s+1}{2}} \Theta^*\left(\frac{k}{N}, 0; iy\right) + iy^{\frac{1-s}{2}} \Theta^*\left(0, -\frac{k}{N}; iy\right)\right] \frac{\mathrm{d}y}{y}
\end{aligned}
$$

Wie im vorherigen Satz, kann man nun an dieser Stelle mit Hilfe der beiden Funktionen $g_1(y)=\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)y^{\frac{s+1}{2}}\Theta^*\left(\frac{k}{N},0;iy\right)$ und $g_2(y)=\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)iy^{\frac{1-s}{2}}\Theta^*\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)$ die Holomorphie mit Satz (1.2) und Lemma (3.5) zeigen. Verwende dazu die Abschätzungen für Θ^*-Reihen. Als nächstes wollen wir die Funktionalgleichung zeigen:

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1.9)}{=} N^{-\frac{s}{2}}\sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)\int_0^\infty iy^{\frac{1-s}{2}}\Theta^*\left(0,-\frac{k}{N};iy\right)\frac{\mathrm{d}y}{y}\\
&\overset{(1.5)}{=} N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)i\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} n\cdot\left(n^2\right)^{\frac{s}{2}-1}e^{-2\pi ikn/N}\\
&= iN^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}\chi(k)e^{2\pi i(-n)k/N}}_{=G(-n,\chi)=\overline{\chi}(-n)G_\chi} n\cdot\left(n^2\right)^{(s/2)-1}\\
&= iG_\chi N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} n\cdot\left(n^2\right)^{(s/2)-1}\overline{\chi}(-n)\\
&= iG_\chi N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} n\cdot\left(n^2\right)^{(s/2)-1}\overline{\chi}(-n)+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(n^2\right)^{(s/2)-1}\overline{\chi}(-n)\right]\\
&= iG_\chi N^{-\frac{s}{2}}\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\cdot\left(n^2\right)^{(s/2)-1}\overline{\chi}(n)-\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(n^2\right)^{(s/2)-1}\overline{\chi}(n)\right]\\
&= -2i\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1+(1-s)}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}\overline{\chi}(n)\\
&= -2i\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\mathbb{L}(\overline{\chi},1-s).
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes analog zum Vorgehen des Satzes (3.5). □

Mit den bisher bewiesenen Sätzen ergibt sich direkt das nächste Korollar.

(3.10) Korollar

Sei $\chi\neq\chi_0$ ein Dirichletscher Charakter mod N. Dann besitzt die L-Reihe $L(\chi,s)$ eine Fortsetzung als ganze Funktion. Für alle $n\in\mathbb{N}_0$ mit $\chi(-1)=(-1)^n$ gilt dabei

$$L(\chi,-n)=0. \qquad \diamond$$

Beweis

Nach Lemma (3.2) gilt

$$L(\chi,s)=\underbrace{\left(\prod_{p|N}(1-\psi(p)p^{-s})\right)}_{\text{holomorph}}\cdot L(\psi,s)\quad \text{für } \mathrm{Re}(s)>1.$$

Für $L(\psi, s)$ existiert eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ nach Satz 3.8 bzw. 3.9 Mit Argumentation über den Identitätssatz besitzt auch $L(\chi, s)$ eine Fortsetzung als ganze Funktion.
Noch zu zeigen: $L(\chi, -n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$, falls $\chi(-1) = (-1)^n$. Betrachte dazu $\chi = \chi_0 \cdot \psi$. Für χ gerade erhält man, dass auch ψ gerade ist, da $\chi_0(-1) = 1$. Also gilt für $\tilde{n} = 2n$, da $\tilde{n}$ gerade:

$$\begin{aligned} L(\chi, -\tilde{n}) &= \left(\prod_{p|N} (1 - \psi(p) p^{\tilde{n}}) \right) \cdot L(\psi, -\tilde{n}) \\ &= \left(\prod_{p|N} (1 - \psi(p) p^{2n}) \right) \cdot \underbrace{L(\psi, -2n)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Analog dazu: Ist χ ungerade, dann ist auch ψ ungerade und für $\tilde{n} = 2n - 1$, da $\tilde{n}$ ungerade, erhalten wir

$$\begin{aligned} L(\chi, -\tilde{n}) &= \left(\prod_{p|N} (1 - \psi(p) p^{\tilde{n}}) \right) \cdot L(\psi, -\tilde{n}) \\ &= \left(\prod_{p|N} (1 - \psi(p) p^{2n-1}) \right) \cdot \underbrace{L(\psi, 1 - 2n)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$ □

Nun verbinden wir die L-Reihe mit dem Bernoulli-Polynom und den verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen aus Abschnitt 2.

(3.11) Satz
Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Dirichletscher Charakter mod N. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$L(\chi, -n) = -\frac{N^n}{n+1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_{n+1}\left(\frac{k}{N}\right) = -\frac{1}{n+1} B_{n+1,\chi}.$$ ◇

Beweis
Für die Beweisführung betrachten wir eine spezielle Funktion $f(s) := \Gamma(s) L(\chi, s)$. Diese Funktion ist holomorph bis auf mögliche Pole in $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mit Satz (1.4) wissen wir, dass

$$\mathrm{Res}_{s=-n} f(s) = \frac{(-1)^n}{n!} L(\chi, -n).$$

Wir untersuchen im Folgenden $f(s)$ für s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$.

$$\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \cdot \int_0^{\infty} t^s e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^s e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \text{ substituiere } t = n \cdot y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} y^s e^{-ny} \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{\mathbf{VI}}{=} \int_0^{\infty} y^s \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-ny}}_{:=F_\chi(y)} \frac{\mathrm{d}y}{y}
\end{aligned}$$

Wir verfolgen nun die gleiche Strategie wie in den vorhergehenden Beweisen, zeigen also für $F_\chi(y)$ ein exponentiell abfallendes Verhalten für $y \to \infty$. Danach betrachten wir das Verhalten für $y \to 0$. Zunächst einige Umformungen von $F_\chi(y)$.

$$F_\chi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-ny} = \sum_{n=1}^{N-1} \chi(n) \sum_{r=0}^{\infty} e^{-(n+rN)y} = \sum_{n=1}^{N-1} \chi(n) \overbrace{\frac{e^{-ny}}{1 - e^{-Ny}}}^{\text{Geom.Reihe}}. \tag{14}$$

Am letzten Term erkennt man, dass $F_\chi(y)$ auf $\left[\frac{\pi}{N}, \infty\right)$ exponentiell fällt, da man leicht zeigt, dass

$$|F_\chi(y)| \leq e^{-y} \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \left| \chi(n) \frac{e^{-(n-1)\frac{\pi}{N}}}{1 - e^{-N\frac{\pi}{N}}} \right| \leq e^{-y} \cdot \frac{N}{1 - e^{-\pi}} < \infty.$$

Nach Lemma (3.7) erhalten wir die Holomorphie von

$$s \mapsto \int_{\pi/N}^{\infty} y^s F_\chi(y) \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Um nun den Fall $y \to 0$ zu betrachten, formen wir nochmals um: Durch das Umordnen der Summe und $\chi(n) = \chi(n-N) = \chi(-(N-n)) = \chi(-1)\chi(N-n)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
F_\chi(y) &= \sum_{n=1}^{N-1} \chi(n) \frac{e^{-ny}}{1-e^{-Ny}} \cdot \frac{e^{Ny}}{e^{Ny}} \\
&= \frac{\chi(-1)}{y} \sum_{n=1}^{N-1} \chi(N-n) \frac{e^{(N-n)y}y}{e^{Ny}-1} \\
&= \frac{\chi(-1)}{y} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \frac{e^{ky}y}{e^{Ny}-1} \\
&\overset{(2.6)}{=} \chi(-1) \sum_{k=0}^{\infty} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \quad \text{für } 0 < y < \frac{2\pi}{N}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird eine Indexverschiebung durchgeführt, dass $B_{0,\chi} = 0$ für $\chi \neq \chi_0$ nach Korollar (2.8). Also nächstes wollen wir damit eine Ungleichung zeigen:

$$\begin{aligned}
&\left| F_\chi(y) - \chi(-1) \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \right| \\
=&\left| \chi(-1) \sum_{k=0}^{\infty} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} - \chi(-1) \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \right| \\
=&\left| \chi(-1) \sum_{k=R+1}^{\infty} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \right| \leq C \cdot y^{R+1}
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung folgt aus Lemma (3.6). Damit ist dann auch die Funktion

$$s \mapsto \int_0^{\pi/N} y^s \left[F_\chi(y) - \chi(-1) \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \right] \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

holomorph für $\mathrm{Re}(s) > -R-1$. Damit lässt sich $f(s)$ in zwei Funktionen unterteilen. Es ist

$$f(s) = \int_0^{\pi/N} \chi(-1) \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^{k+s-1}}{(k+1)!} \mathrm{d}y + \varphi(s),$$

wobei

$$\varphi(s) = \int_{\pi/N}^{\infty} y^s F_\chi(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int_0^{\pi/N} y^{s-1} \left(F_\chi(y) - \chi(-1) \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^k}{(k+1)!} \right) \mathrm{d}y.$$

Wie vorhin bewiesen, besteht φ aus zwei Funktionen, die holomorph für $\mathrm{Re}(s) > -R-1$ sind. Damit ist φ für die Berechnung von $\mathrm{Res}_{s=-n} f(s)$ unbedeutend, wobei $0 \leq n \leq R$ gelte. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi/N} \chi(-1) \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^{k+s-1}}{(k+1)!} \mathrm{d}y &= \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{y^{k+s}}{(k+1)!(k+s)} \Bigg|_0^{\pi/N} \cdot \chi(-1) \\ &= \sum_{k=0}^{R} B_{k+1,\chi} \frac{(\pi/N)^{k+s}}{(k+1)!(k+s)} \cdot \chi(-1)\end{aligned}$$

Wir gehen nun über zur Berechnung des Residuums dieses Termes und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{s=-n} \left(\sum_{k=0}^{R} \chi(-1) B_{k+1,\chi} \frac{(\pi/N)^{k+s}}{(k+1)!(k+s)} \right) &= \chi(-1) \frac{B_{n+1,\chi}}{(n+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} L(\chi, -n).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}L(\chi, -n) = \chi(-1)(-1)^n \cdot \frac{B_{n+1,\chi}}{n+1} &\overset{(2.8)}{=} -\frac{B_{n+1,\chi}}{n+1} \\ &\overset{(2.7)}{=} \frac{-1}{n+1} N^n \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_{n+1}\left(\frac{k}{N}\right).\end{aligned}$$ □

Nun gehen wir über zu der Berechnung der Werte der L-Reihe mit $n > 0$.

(3.12) Satz

Sei χ ein primitiver Dirichletscher Charakter mod N, $N > 1$, so gilt

a) Ist χ ungerade, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}L(\chi, 2n+1) &= \frac{G_\chi (2\pi i)^{2n+1}}{2N(2n+1)!} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi}(k) B_{2n+1}\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= \frac{G_\chi}{2(2n+1)!} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n+1} \cdot B_{2n+1,\overline{\chi}}.\end{aligned}$$

b) Ist χ gerade, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}L(\chi, 2n) &= \frac{G_\chi (2\pi i)^{2n}}{2N(2n)!} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi}(k) B_{2n}\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= \frac{G_\chi}{2(2n)!} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n} \cdot B_{2n,\overline{\chi}}.\end{aligned}$$ ◇

Beweis
Mit Hilfe der Funktionalgleichungen, können wir die positiven Stellen über die Funktionswerte der negativen Stellen berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(\chi, 2n+1) &= -i\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\mathbb{L}(\overline{\chi}, 1-(2n+1)) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{2n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right)L(\chi, 2n+1) &= -i\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{-2n}{2}}\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)L(\overline{\chi}, -2n) \\
\Leftrightarrow L(\chi, 2n+1) &= -i\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{n+\frac{2n+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\Gamma(n+1)}L(\overline{\chi}, -2n).
\end{aligned}$$

Wir kennen folgende Identitäten der Gammafunktion:

1. $\Gamma(n+1) = n!$,
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}$.

Punkt 2 erhalten wir aus einer Kombination von Satz I(3.6) und I(3.8) aus dem Skript zur analytischen Zahlentheorie:

$$\begin{aligned}
&1)\ \Gamma(1/2-n) = \Gamma(1-(n+1/2)) \overset{I(3.6)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi(n+1/2))\Gamma(n+1/2)} \\
&2)\ \Gamma(n+1/2) \overset{I(3.8)}{=} \frac{2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2\sqrt{\pi}(2n)!n}{4^n\cdot 2n\cdot n!} = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{4^n n!} \\
&3)\ \sin(\pi(n+1/2)) = (-1)^n
\end{aligned}$$

Dies eingesetzt, ergibt dann 2.:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) &= \frac{(-1)^n\pi}{\Gamma(n+1/2)} \\
&= \frac{(-1)^n\pi 4^n n!}{\sqrt{\pi}(2n)!} \\
&= \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Nun können wir $L(\chi, 2n+1)$ weiter berechnen.

$$\begin{aligned}
L(\chi, 2n+1) &= -i\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{n+\frac{2n+1}{2}}\frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!n!}L(\overline{\chi}, -2n) \\
&= -iG_\chi\left(\frac{\pi}{N}\right)^{2n+1}\frac{(-4)^n}{(2n)!}L(\overline{\chi}, -2n) \\
&\overset{(3.11)}{=} -iG_\chi\left(\frac{\pi}{N}\right)^{2n+1}\frac{(-4)^n}{(2n)!}\frac{-1}{2n+1}B_{2n+1,\overline{\chi}}
\end{aligned}$$

Mit

1. $i^{2n+1} = i \cdot (-1)^n$,

2. $(-4)^2 = 2^{2n} \cdot (-1)^n$,

erhalten wir das Gewünschte.

$$\begin{aligned}
L(\chi, 2n+1) &= iG_\chi \left(\frac{\pi}{N}\right)^{2n+1} \frac{(2)^{2n} \cdot (-1)^n}{(2n+1)!} B_{2n+1,\overline{\chi}} \\
&= \frac{G_\chi}{2(2n+1)!} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n+1} \cdot B_{2n+1,\overline{\chi}} \\
&\overset{(2.7)}{=} \frac{G_\chi}{2(2n+1)!} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n+1} \cdot N^{2n} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi}(k) B_{2n+1}\left(\frac{k}{N}\right)
\end{aligned}$$

Ähnlich geht man für χ ungerade vor. Man beginnt mit der Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(\chi, 2n) &= \frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \mathbb{L}(\overline{\chi}, 1-(2n)) \\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{2n}{2}} \Gamma\left(\frac{2n}{2}\right) L(\chi, 2n) &= \frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{1-2n}{2}} \Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) L(\overline{\chi}, 1-2n) \\
\Leftrightarrow \quad L(\chi, 2n) &= \frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{2n-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\Gamma(n)} L(\overline{\chi}, -2n) \\
&= \frac{G_\chi}{\sqrt{N}} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{2n-\frac{1}{2}} \frac{\frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}}{(n-1)!} L(\overline{\chi}, -2n) \\
&= G_\chi \left(\frac{\pi}{N}\right)^{2n} \frac{(-4)^n n}{(2n)!} \frac{-1}{2n} B_{2n,\overline{\chi}} \\
&= G_\chi \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} \frac{-1}{2} B_{2n,\overline{\chi}}
\end{aligned}$$

Mit Rechenschritten analog zu a) folgt also die Behauptung für b), wobei (3.11) und (3.8) verwendet werden. □

Rechnen wir mithilfe dieses Satzes nun $L(\chi, 1)$ aus, für einen Spezialfall aus:

(3.13) Korollar
Ist χ ein primitiver ungerader Charakter mod N und $N > 1$, so gilt

$$L(\chi, 1) = \frac{\pi i G_\chi}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi}(k) k. \qquad \diamond$$

Beweis
Da $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ folgt mit vorhergehendem Satz:

$$\begin{aligned}
L(\chi, 2\cdot 0+1) &= \frac{G_\chi(2\pi i)}{2N}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi}(k)B_1\left(\frac{k}{N}\right)\\
&= \frac{\pi i G_\chi}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi}(k)\left(\frac{k}{N}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\pi i G_\chi}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi}(k)\left(\frac{2k-N}{2}\right)\\
&= \frac{\pi i G_\chi}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi}(k)k - \frac{\pi i G_\chi}{2N}\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi}(k)}_{=0,\text{ nach }(1.16)}\\
&= \frac{\pi i G_\chi}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\overline{\chi}(k)k.
\end{aligned}$$

$\sum\limits_{n \bmod N}\chi(k) = 0$ für $\chi \neq \chi_0$. Da wir einen ungeraden Charakter haben, ist dies erfüllt.$\square$

4 Anwendungen

Zum Schluss dieser Ausarbeitung betrachten wir noch ein paar Beispiele zur Gaußschen Summe und zu den L-Reihen.

(4.1) Definition (GAUSSsche Quadratsumme)
Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei die Gaußsche Quadratsumme definiert durch

$$G(m, N) = \sum_{n \bmod N} e^{2\pi i m n^2/N}. \tag{15}$$

$\diamond$

(4.2) Korollar
Für $k, m, N, N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}\setminus\{2\}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ gelten die folgenden Identitäten:

a) $G(km, kN) = kG(m, N)$

b) $G(m, N_1N_2) = G(mN_2, N_1)G(mN_1, N_2)$, falls $\mathrm{ggT}(N_1, N_2) = 1$.

c) $G(m, p^{r+2}) = pG(m, p^r)$, falls $\mathrm{ggT}(p, m) = 1$.

d) $G(m, p) = G\left(m, \left(\frac{\cdot}{p}\right)\right) = \left(\frac{m}{p}\right)G(1, p)$, falls $\mathrm{ggT}(p, m) = 1$.

e) $G(m,p)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p$, falls $\mathrm{ggT}(p,m) = 1$.

f) $G(m, 4k) = 2(1+i)\sqrt{k/m} \cdot \overline{G(k,m)}$.

g) $G(3969, 6600) = 30(1-i)\sqrt{22}$. $\diamond$

Beweis

Zu a): Wir wissen: Durchläuft n ein Vertretersystem mod kN, dann gilt für n: $n \in \{1, \dots, N, (N+1), \dots, 2N, \dots, kN\}$. Wir haben nun also Summe stehen:

$$G(km, kN) = \sum_{n \bmod kN} e^{2\pi i k m n^2/(kN)} = \sum_{n \bmod kN} e^{2\pi i m n^2/N}.$$

Wir sind also offensichtlich n-periodisch, dementsprechend gilt für n, das es k-mal das Vertretersystem mod N durchläuft. Damit ergibt sich Behauptung.

Zu b): Setze $q = kN_1 + jN_2$, dann durchläuft q ein Vertretersystem mod N_1N_2, wenn $\mathrm{ggT}(N_1, N_2) = 1$ erfüllt ist. Zudem gilt: k durchläuft ein Vertretersystem mod N_2 und j ein Vertretersystem mod N_1. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
G(m, N_1N_2) &= \sum_{q \bmod N_1N_2} e^{2\pi i m q^2/(N_1N_2)} \\
&= \sum_{j \bmod N_1} \sum_{k \bmod N_2} e^{2\pi i m \frac{(kN_1)^2 + (jN_2)^2 + 2kjN_1N_2}{N_1N_2}} \\
&= \sum_{j \bmod N_1} \sum_{k \bmod N_2} e^{2\pi i m \frac{(kN_1)^2 + (jN_2)^2}{N_1N_2}} \\
&= \sum_{j \bmod N_1} e^{2\pi i m N_2 j/N_1} \sum_{k \bmod N_2} e^{2\pi i m N_1 k/N_2} \\
&= G(mN_2, N_1) G(mN_1, N_2).
\end{aligned}$$

Zu c): n durchlaufe ein Vertretersystem mod p^{r+2}, setze $n = kp^{r+1} + l$, wobei k ein Vertretersystem mod p durchläuft und l ein Vertretersystem mod p^{r+1}. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \bmod p^{r+2}} e^{2\pi i m \frac{n^2}{p^{r+2}}} &= \sum_{k \bmod p} \sum_{l \bmod p^{r+1}} e^{2\pi i m \frac{(kp^{r+1}+l)^2}{p^{r+2}}} \\
&= \sum_{l \bmod p^{r+1}} e^{2\pi i m \frac{l^2}{p^{r+2}}} \underbrace{\sum_{k \bmod p} e^{2\pi i m \frac{2kl}{p}}}_{(*)}
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun $(*)$:

$$\sum_{k \bmod p} e^{2\pi i m \frac{2kl}{p}} = \sum_{k \bmod p} e^{2\pi i (2ml)\frac{k}{p}} \overset{\text{Geom. Reihe}}{=} \begin{cases} p, & \text{falls } p \,|\, (2ml), \\ 0, & \text{falls } p \nmid (2ml) \end{cases}$$

Das bedeutet, die Summe $(*)$ ist genau dann gleich p, wenn $p|(2ml)$. Dies ist, da nach Voraussetzung $p > 2$, gleichbedeutend mit $p|(ml)$. Also gilt: $p|m$ oder $p|l$. Mit der zweiten Voraussetzung, dass $\mathrm{ggT}(m,p) = 1$ ist, muss also l von p geteilt werden. Damit zurück zur Ausgangssumme: Unter der Bedingung $p|l$ finden wir ein k, so dass $l = kp$ gilt. Zudem wissen wir: durchläuft $k \cdot p$ ein Vertretersystem mod p^{r+1}, so durchläuft k ein Vertretersystem mod p^r, denn: $k \cdot p \in \{1, \ldots, p^{r+1}\} \Rightarrow k \in \{1/p, \ldots, 1, \ldots, 2, \ldots, p^r\} \Rightarrow k \in \{1, \ldots, p^r\}$. Damit erhalten wir das Ergebnis.

$$\begin{aligned} \sum_{n \bmod p^{r+2}} e^{2\pi i m \frac{n^2}{p^{r+2}}} &= p \sum_{\substack{l \bmod p^{r+1}, \\ p|l}} e^{2\pi i m \frac{l^2}{p^{r+2}}} \\ &= p \sum_{k \cdot p \bmod p^{r+1}} e^{2\pi i m \frac{k^2}{p^r}} \\ &= p \sum_{k \bmod p^r} e^{2\pi i m \frac{k^2}{p^r}} = p \cdot G(m, p^r). \end{aligned}$$

Zu d): Zeige zuerst: $G(m,p) = G(m, \chi_p)$ mit

$$\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \mid n, \\ 1, & \text{falls } p \nmid n \text{ und } \exists\, x \in \mathbb{Z}: \; n \equiv x^2 (\bmod p), \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren dafür die Abbildung $G_p : n \to n^2 \bmod p$. Dann gilt für das Legendre-Symbol:

$$\left(\frac{\cdot}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \cdot \equiv 0 \bmod p, \\ 1, & \text{falls } x \in Bi(G_p)\; x \equiv \cdot \bmod p, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: Für alle $x \in Bi(G_p)$ gilt: Es existiert genau ein a und ein $b \in \{1, \ldots, p\}$, so dass $a \not\equiv b \,(\bmod p)$ und $x \equiv a^2 = b^2 \,(\bmod p)$ mit $a + b \equiv 0 \,(\bmod p)$.

Dazu: Angenommen es existiert ein zusätzliches c, so dass $c^2 \equiv x \,(\bmod p)$. Dann muss ein k existieren mit $c = a + k$ und $p \nmid k$. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} a^2 &\equiv (a+k)^2 \pmod p \\ \Leftrightarrow a^2 &\equiv a^2 + 2ak + k^2 \pmod p \\ \Leftrightarrow -2ak &\equiv k^2 \pmod p \\ \Leftrightarrow (2a+k)k &\equiv 0 \pmod p. \end{aligned}$$

Also muss $2a + k$ ein Vielfaches von p sein.

$$\begin{aligned} 2a + k &\equiv 0 \pmod p \\ \Leftrightarrow a + c &\equiv 0 \pmod p. \end{aligned}$$

Falls $c \in \{1, \dots, p\}$, so folgt daraus, dass $c = b$. Damit wissen wir, dass es immer genau 2 Elemente gibt, die die obigen Bedingungen erfüllen. Um die Summen nachher weiter umzurechnen, definieren wir uns zwei weitere Mengen.

$$\begin{aligned} A &:= \{n \in \{1, \dots, p\} : \ \exists b : b^2 \equiv n \pmod p, \ p \nmid n\} \\ B &:= \{n \in \{1, \dots, p\} : \ \nexists b : b^2 \equiv n \pmod p, \ p \nmid n\} \end{aligned}$$

Damit haben wir jetzt einige Voraussetzungen, um die Summe zu berechnen.

$$\begin{aligned} \sum_{n \bmod p} e^{2\pi i m \frac{n^2}{p}} &\stackrel{!}{=} \sum_{n \bmod p} \left(\frac{n}{p}\right) e^{2\pi i m \frac{n}{p}} \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sum_{\substack{n \bmod p, \\ n \in A}} e^{2\pi i m \frac{n}{p}} &\stackrel{!}{=} \sum_{\substack{n \bmod p, \\ n \in A}} e^{2\pi i m \frac{n}{p}} - \sum_{\substack{n \bmod p, \\ n \in B}} e^{2\pi i m \frac{n}{p}} \\ \Leftrightarrow 1 + \sum_{\substack{n \bmod p, \\ n \in A}} e^{2\pi i m \frac{n}{p}} + \sum_{\substack{n \bmod p, \\ n \in B}} e^{2\pi i m \frac{n}{p}} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n \bmod p} e^{2\pi i m \frac{n}{p}} &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist erfüllt, wenn m nicht von p geteilt wird. Da vorausgesetzt wird, dass $\mathrm{ggT}(m, p) = 1$ gilt, ist damit die Behauptung gezeigt.
Nun müssen wir nur noch die zweite Gleichheit zeigen. Diese folgt direkt aus Satz (1.19), denn χ_p ist ein primitiver Charakter mod p, damit gilt

$$G(m, \chi_p) = \overline{\chi_p}(m) \cdot G_{\chi_p}.$$

Da χ_p reell ist, gilt $\overline{\chi_p} = \chi_p$ und wir erhalten

$$G\left(m, \left(\frac{\cdot}{p}\right)\right) = G(m, \chi_p) = \chi_p(m) G_{\chi_p} = \left(\frac{m}{p}\right) G(1, p).$$

Zu e): χ_p ist ein reeller, primitiver Dirichletscher Charakter mod p, mit Satz (1.19) können wir wieder leicht berechnen:

$$G(m,\chi_p)^2 \overset{d)}{=} \underbrace{\chi_p(m)^2}_{=1} G_{\chi_p}^2 = G_{\chi_p} \cdot G_{\overline{\chi_p}} \overset{(1.19)}{=} \chi(-1)p.$$

Zu f): Zu zeigen: $G(m,4k) = 2(1+i)\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \overline{G(k,m)}$. Betrachte hierzu die Funktion $f:[0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \sum_{l=0}^{2k-1} e^{2\pi i m \frac{(l+t)^2}{4k}}$.

$$f(1) = \sum_{l=0}^{2k-1} e^{2\pi i m \frac{(l+1)^2}{4k}} = \sum_{l=0}^{2k} e^{2\pi i m \frac{l^2}{4k}} = \sum_{l=0}^{2k-1} e^{2\pi i m \frac{l^2}{4k}} = f(0)$$

Analog $f'(0) = f'(1)$. Wir setzen f nun also periodisch fort und berechnen die Fourierentwicklung. Dazu einige notwendige Informationen:

- $f(t) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} a(r) e^{2\pi i r t}$

- $e^{2\pi i m \frac{(l+2k)^2}{4k}} = e^{2\pi i m \frac{l^2}{4k}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i m \frac{4k+4k^2}{4k}}}_{=1}$ und damit
- $\sum_{l=0}^{2k-1} e^{2\pi i m \frac{l^2}{4k}} = \sum_{l=2k}^{4k-1} e^{2\pi i m \frac{l^2}{4k}} = f(0)$, also gilt
- $2 \cdot f(0) = G(m,4k) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} a(r) e^{2\pi i r \cdot 0} = 2 \cdot \sum_{r\in\mathbb{Z}} a(r)$.

Wir berechnen nun $a(r)$:

$$\begin{aligned} a(r) &= \sum_{l \bmod 2k} \int_0^1 e^{2\pi i \left(\frac{m(l+r)^2}{4k} - rt\right)} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2k} e^{2\pi i \left(\frac{mt^2}{4k} - rt\right)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
G(m,4k) &= 2\sum_{r\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^{2k} e^{2\pi i\left(\frac{mt^2}{4k}-rt\right)}\mathrm{d}t \\
&\overset{t=2y\sqrt{\frac{k}{m}}}{=} 4\sqrt{\frac{k}{m}}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^{\sqrt{km}} e^{2\pi i\left(y^2-2r\sqrt{\frac{k}{m}}y\right)}\mathrm{d}y \\
&= 4\sqrt{\frac{k}{m}}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^{\sqrt{km}} e^{2\pi i\left(y-r\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}\mathrm{d}y \\
&= 4\sqrt{\frac{k}{m}}\sum_{r\bmod m} e^{-2\pi i r^2\frac{k}{m}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int\limits_{ml\sqrt{\frac{k}{m}}}^{\sqrt{km}+ml\sqrt{\frac{k}{m}}} e^{2\pi i\left(y-(r+ml)\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}\mathrm{d}y \\
&= 4\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\overline{G(k,m)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i y^2}\mathrm{d}y \\
&= 4\sqrt{k/m}\cdot\overline{G(k,m)}\cdot\frac{1+i}{2} = 2(1+i)\sqrt{k/m}\cdot\overline{G(k,m)}.
\end{aligned}$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis.

<u>Zu g)</u>:

$$\begin{aligned}
G(3969,6600) &= 3G(1323,2200) = 3G(1323,550\cdot 4) \\
&\overset{f)}{=} 3\cdot 2(1+i)\sqrt{\frac{550}{1323}}\cdot\overline{G(550,1323)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Berechnung von $G(550,1323)$, bedenke dass $\mathrm{ggT}(3^3,7^2)=\mathrm{ggT}(26950,3)=1$:

$$\begin{aligned}
G(550,1323) &= G(550,3^3\cdot 7^2) \overset{b)}{=} G(550\cdot 3^3,7^2)\cdot G(550\cdot 7^2,3^3) \\
&= G(14850,7^{0+2})\cdot G(26950,3^{1+2}) \\
&\overset{c)}{=} 7G(14850,1)\cdot 3G(26950,3) \\
&= 7\underbrace{e^{2\pi i\cdot 14850}}_{=1}\cdot 3G(26950,3) \overset{d)}{=} 21\underbrace{\left(\frac{26950}{3}\right)}_{\text{(i)}}\underbrace{G(1,3)}_{\text{(ii)}}.
\end{aligned}$$

Nun fehlen noch die Berechnungen von (i) und (ii):

Zu (i): $26950\equiv 1\bmod 3$, dabei ist 1 eine Quadratzahl, also ist (i)$=1$.

Zu (ii):

$$G(1,3)=\sum_{n\bmod 3} e^{2\pi i n^2/3} = i\sqrt{3}.$$

Damit erhalten wir für $G(550, 1323) = 21 \cdot 1 \cdot i\sqrt{3} = i \cdot 21\sqrt{3}$ und damit für (16):

$$6(1+i)\sqrt{\frac{550}{1323}} \cdot \overline{G(550, 1323)} = 6(1+i)\sqrt{\frac{550}{1323}} \cdot (-i \cdot 21\sqrt{3}) = 30(1-i)\sqrt{22}. \qquad \square$$

Nun wollen wir die Strategien aus Kapitel 3 verwenden, um Holomorphieaussagen über die Hurwitzsche Zetafunktion zu treffen.

(4.3) Satz

(a) Für $0 < a \leq 1$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$$

eine holomorphe Funktion.

(b) $\zeta(s, a)$ hat eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ mit einem einfachen Pol in $s = 1$ und Residuum 1.

(c) Sei χ ein Dirichletscher Charakter modulo N. So gilt für

$$L(\chi, s) = N^{-s} \sum_{r=1}^{N} \chi(r)\zeta(s, r/N)$$

$L(\chi, s)$ ist meromorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzbar mit einfachem Pol in $s = 1$ mit Residuum $\varphi(N)/N$, falls $\chi = \chi_0$. Für $\chi \neq \chi_0$ ist $L(\chi, s)$ eine ganze Funktion in s. $\diamond$

Beweis

Zu(a): Jeder Summand $(n+a)^{-s}$ ist holomorph auf $\mathbb{H}_1 := \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(n+a)^{-s}\right| < \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-\mathrm{Re}(s)} < \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-(1+\epsilon)} < \infty$$

Wobei $\varepsilon > 0$.

Damit folgt mit dem Satz von Weierstrass die Holomorphie auf $\mathbb{H}_1$

Zu (b): Mit einer Hilfsfunktion $f(s) := \Gamma(s) \cdot \zeta(s, a)$ und einer Strategie ähnlich zum Beweis von 3.11 erhalten wir zunächst die Meromorphie der Hilfsfunktion und damit die

Meromorphie der Hurwitzschen Zetafunktion.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\cdot\zeta(s,a) &= \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx\sum_{n=0}^\infty (n+a)^{-s} = \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{n+a}\right)^s e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\overset{y=x(n+a)}{=} \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\infty (y)^s\, e^{-y(n+a)}\frac{\mathrm{d}y}{y} \overset{\mathbf{VI}}{=} \int\limits_0^\infty (y)^s \sum_{n=0}^\infty e^{-y(n+a)}\frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \int\limits_0^\infty \frac{-x}{e^{-x}-1}e^{-xa}x^{s-2}\mathrm{d}x \overset{(1.20)}{=} \int\limits_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!}(-x)^n e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{B_n}{n!}(-1)^n \int\limits_0^\infty x^{n+s-2}e^{-ax}\mathrm{d}x + \int\limits_0^\infty \underbrace{\sum_{n=N+1}^\infty \frac{B_n}{n!}(-x)^n}_{:=h(x)} e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{B_n}{n!}(-1)^n \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{a}\right)^{n+s-1} e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int\limits_0^\infty h(x)e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{B_n}{n!}(-1)^n a^{1-n-s}\Gamma(n+s-1) + \int\limits_0^\infty h(x)e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Wähle N, so dass $\mathrm{Re}(s)-2+N+1=\mathrm{Re}(s)+N-1>0$,also $N>1-\mathrm{Re}(s)$. Analog zu (3.11) lässt sich $h(x)$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
|h(x)| &= \left|\frac{B_n}{n!}(-x)^n\right| < C\cdot x^{N+1} \\
\Rightarrow \int\limits_0^1 \left|h(x)e^{-ax}x^{s-2}\right|\mathrm{d}x &< \int\limits_0^1 \left|Ce^{-ax}x^{N+s-1}\right|\mathrm{d}x \\
&< C\int\limits_0^1 e^{-ax} < \infty
\end{aligned}$$

Da nun zusätzlich $h(x)e^{-ax}x^{s-2}$ holomorph ist, ist mit Satz (1.2) auch das Integral holomorph. Für

$$s \mapsto \int\limits_1^\infty h(x)e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x$$

erkennt man die Holomorphie direkt an dem e^{-ax} Term, da $a \in (0,1]$ und (3.7) anwendbar ist. Somit ist

$$s \mapsto \int\limits_0^\infty h(x)e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x$$

holomorph auf $\mathbb{H}_{1-N}$. Der übrige Term ist eine Summe von Γ-Funktionen multipliziert mit a^s , somit eine meromorphe Funktion. Wir erhalten somit eine meromorphe Fortsetzung von $f(s)$ auf $\mathbb{H}_{1-N}$ mit beliebig großem N, also auch auf $\mathbb{C}$. Mit einer einfachen Umformung erhalten wir die meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s,a)$.

$$\zeta(s,a) = f(s)/\Gamma(s)$$

wir erwarten, dass $f(s)$ einfache Pole in $\{..., -2, -1, 0, 1\}$ hat, da die im Argument verschobene Γ-Funktion solche Polstellen besitzt und es die einzig möglichen sind. Wir berechnen nun die Residuun an diesen Stellen.

Fall 1: $-m,\ m \in \mathbb{N}_0$

Da $\frac{1}{\Gamma(s)}$ eine ganze Funktion ist, geht, für hinreichend großes $N > m$, der Ausdruck

$$s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int\limits_0^\infty h(x)e^{-ax}x^{s-2}\mathrm{d}x$$

nicht in die Berechnung des Residuums ein. Wir erhalten mit den Rechenregeln des Residuums

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{s=-m}\frac{\Gamma(n+s-1)}{\Gamma(s)} \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{B_n}{n!}(-1)^n a^{1-n-s}\Gamma(n+s-1) \\
=&\sum_{n=0}^{N} \frac{B_n}{n!}(-1)^n a^{1-n+m}\mathrm{Res}_{s=-m}\frac{\Gamma(n+s-1)}{\Gamma(s)}
\end{aligned}$$

Mit einer ganzen Funktion $g(s)$ mit $g(-m) \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Gamma(s) = g(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m! \cdot (n+s)} \\
&\Rightarrow \mathrm{Res}_{s=-m}\frac{\Gamma(n+s-1)}{\Gamma(s)} = \mathrm{Res}_{s=-m}\frac{g(n+s-1) + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\cdot(k+n+s-1)}}{g(s) + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\cdot(k+s)}} \\
&= \mathrm{Res}_{s=-m}\frac{\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\cdot(k+n+s-1)}}{g(s) + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\cdot(k+s)}} \cdot \frac{s+m}{s+m} = \mathrm{Res}_{s=-m}\frac{\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(s+m)}{k!\cdot(k+n+s-1)}}{g(s) + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(s+m)}{k!\cdot(k+s)}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da die einfachen Polstelle sich jeweils weg heben.
Fall 2: $m = 1$
Wir wissen, dass $\Gamma(1) = 1$ ist und somit

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{B_n}{n!}(-1)^n a^{-n} \mathrm{Res}_{s=1} \frac{\Gamma(n+s-1)}{\Gamma(s)} \\
&= B_0 \cdot a^0 \mathrm{Res}_{s=1} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+1} a^{-n-1} \mathrm{Res}_{s=1} \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(s)} \\
&= B_0 \cdot \mathrm{Res}_{s=1} \Gamma(s-1) + \sum_{n=0}^{N} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+1} a^{-n-1} 0 = 1.
\end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass die meromorphe Fortsetzung nur einen einfachen Pol in 1 hat mit Residuum 1.
Zu c)
Da $r/N \in (0,1]$ ist, hat $\zeta(s, r/N)$ nach b) eine meromorphe Fortsetzung mit einfachem Pol in 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=1} L(\chi, s) &= N^{-1} \sum_{r=1}^{N} \chi(r) \mathrm{Res}_{s=1} \zeta(s, r/N) \\
&= N^{-1} \sum_{r=1}^{N} \chi(r) \overset{(1.16)}{=} \begin{cases} \varphi(N)/N & , \chi = \chi_0 \\ 0 & , \chi \neq \chi_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Falls das Residuum gleich 0 ist, lsst sich die Hurwitzsche Zetafunktion in jedem Punkt holomorph fortsetzen, da wir nur eine einfache Polstelle haben. □

Literaturverzeichnis:

[1] Aloys Krieg, *Analytische Zahlentheorie*, Skript, 2009

[2] Aloys Krieg, *Funktionentheorie I*, Skript, 2008

[3] Otto Forster, *Analysis 3*, 4. Auflage 2007