# Einführung in die Theorie der Dirichlet-Reihen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 02.04.2012

Imke Kleines

Der Vortrag gibt eine kurze Einführung in die Dirichlet-Reihen. Dazu werden zu Beginn mit dem Konzept der zahlentheoretischen Funktion und dem Abelschen Lemma grundlegende Definitionen und Sätze vorgestellt. Der weitere Vortrag beschäftigt sich mit der Konvergenz von Dirichlet-Reihen. Dabei wird zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz unterschieden. Diese Unterscheidung ist im Unterschied zu Potenzreihen bei Dirichlet-Reihen nötig. Zusätzlich sind die Konvergenzbereiche bei Dirichletreihen Halbebenen mit $Re(z) > \sigma$ und keine Kreise, so dass Konvergenzabszissen und nicht Konvergenzradien angegeben werden müssen. Gefolgt von der Einführung zweier Berechnungsvorschriften der Konvergenzabszisse, schließt der Vortrag mit einigen Beispielen.

## §1 Vorüberlegungen

### 1.1 Zahlentheoretische Funktion

Für die Einführung der Dirichlet-Reihe wird die folgende Definiton der **zahlentheoretischen Funktion** gebraucht.

**(1.1) Definition**
Eine zahlentheoretische Funktion ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

## 1.2 Abelsches Lemma

In vielen Beweisen im Zusammenhang mit Dirichlet-Reihen wird das **Abelsche Lemma** benötigt.

**(1.2) Satz** (Abelsches Lemma)
a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und

$$F : [0, \infty) \to \mathbb{C},\ F(x) := \sum_{n \leq x} f(n).$$

Ist die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C},\ 0 < a < b$, stetig und stückweise stetig differenzierbar, so gilt

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) \cdot g(n) = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(t) \cdot g'(t) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

b) Sind $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zahlentheoretische Funktionen und definiert man

$$F(M, N) := \sum_{n=M}^{N} f(n), \quad N \geq M,$$

so gilt für alle $N \geq M$

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) \cdot g(n) = \sum_{n=M}^{N-1} F(M, n) \cdot (g(n) - g(n+1)) + F(M, N) \cdot g(N). \tag{2}$$

**Beweis:**
a) Mit $N = \lfloor b \rfloor$, $M = \lfloor a \rfloor + 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) \cdot g(n) &= \sum_{n=M}^{N} f(n) \cdot g(n) \\
&= \sum_{n=M}^{N} \underbrace{(F(n) - F(n-1))}_{=\sum_{k\leq n} f(k) - \sum_{k\leq n-1} f(k) = f(n)} \cdot g(n) \\
&= \sum_{n=M}^{N} F(n) \cdot g(n) - \sum_{n=M}^{N} F(n-1) \cdot g(n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{n=M}^{N} F(n)\cdot g(n)}_{\sum_{n=M}^{N-1} F(n)\cdot g(n)+F(N)\cdot g(N)} - \underbrace{\sum_{n=M-1}^{N-1} F(n)\cdot g(n+1)}_{\sum_{n=M}^{N-1} F(n)\cdot g(n+1)+F(M-1)\cdot g(M)} \\
&= \sum_{n=M}^{N-1} F(n)\cdot (g(n)-g(n+1)) + F(N)\cdot g(N) - F(M-1)\cdot g(M) \\
&= -\sum_{n=M}^{N-1} \int_n^{n+1} F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t - \int_N^b F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t + F(b)\cdot g(b) \\
&\quad - \int_a^M F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t - F(a)\cdot g(a) \\
&= F(b)\cdot g(b) - F(a)\cdot g(a) - \int_a^b F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

wobei im vorletzten Umformungsschritt $F(N) = F(b)$, $F(a) = F(M-1)$ und

$$
\begin{aligned}
\int_n^{n+1} F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_n^{n+1-\varepsilon} F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t + \int_{n+1-\varepsilon}^{n+1} F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(F(n)\cdot \int_n^{n+1-\varepsilon} g'(t)\mathrm{d}t\right) + \underbrace{\int_{n+1}^{n+1} F(t)\cdot g'(t)\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= F(n)\,(g(n)-g(n+1))
\end{aligned}
$$

verwendet wurde.

b) $\displaystyle\sum_{n=M}^{N-1} F(M,n)\cdot (g(n)-g(n+1)) + F(M,N)\cdot g(N)$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{n=M}^{N-1} F(M,n)\cdot g(n)}_{\sum_{n=M}^{N} F(M,n)\cdot g(n) - F(M,N)\cdot g(N)} - \sum_{n=M}^{N-1} F(M,n)\cdot g(n+1) + F(M,N)\cdot g(N) \\
&= \sum_{n=M}^{N} F(M,n)\cdot g(n) - \sum_{n=M}^{N-1} F(M,n)\cdot g(n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{n=M}^{N} F(M,n)\cdot g(n)}_{\sum_{n=M+1}^{N} F(M,n)\cdot g(n)+F(M,M)\cdot g(M)} \quad - \underbrace{\sum_{n=M+1}^{N} F(M,n-1)\cdot g(n)}_{\textit{Indexverschiebung}} \\
&= \underbrace{F(M,M)}_{\sum_{k=M}^{M} f(k)} \cdot g(M) + \sum_{n=M+1}^{N} \underbrace{(F(M,n)-F(M,n-1))}_{\sum_{k=M}^{n} f(k)-\sum_{k=M}^{n-1} f(k)=f(n)} \cdot g(n) \\
&= f(M)\cdot g(M) + \sum_{n=M+1}^{N} f(n)\cdot g(n) \\
&= \sum_{n=M}^{N} f(n)\cdot g(n) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Eine Anwendung des Abelschen Lemmas liefert

**(1.3) Korollar**

$$\sum_{p\leq x, p \text{ prim}} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(x)) \qquad \text{für } x \to \infty.$$

**Beweis:**

$$\sum_{p\leq x, p \text{ prim}} \frac{1}{p} = \sum_{1<n\leq x} f(n)\cdot \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ prim} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich $t$ ergibt sich zu $F(t) = \sum_{n\leq t} f(n) = \pi(t)$. Zusammen mit $g(t) = \frac{1}{t}$ und (1) folgt

$$\sum_{2<n\leq x} f(n)\cdot\frac{1}{n} = \pi(x)\cdot\frac{1}{x} - \pi(2)\cdot\frac{1}{2} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Somit erhält man

$$\frac{\pi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \pi(2)\cdot\frac{1}{2} + \sum_{2<n\leq x} f(n)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{1<n\leq x} f(n)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{p\leq x, p \text{ prim}} \frac{1}{p}.$$

Aufgrund der Proportionalität $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\sum_{p \leq x, p \text{ prim}} \frac{1}{p} &\sim \underbrace{\frac{x}{\ln(x) \cdot x}}_{\frac{1}{\ln(x)}} + \int_2^x \underbrace{\frac{t}{\ln(t) \cdot t^2}}_{\frac{1}{\ln(t) \cdot t}} \mathrm{d}t \\
&\sim \frac{1}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{g'(t)}{g(t)} \mathrm{d}t \quad \text{für } g(t) = \ln(t) \\
&\sim \frac{1}{\ln(x)} + \ln(g(t))|_2^x \sim \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{\to 0} + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \\
&\to \ln(\ln(x)) \text{ für } x \to \infty. \qquad \square
\end{aligned}
$$

## 1.3 Definitionen

Nach diesen grundlegenden Vorüberlegungen wird nun die **Dirichlet-Reihe** eingeführt.

**(1.4) Definition**
Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, so definiert man die Dirichlet-Reihe zu $f$ durch

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Für die weitergehende Betrachtung der Dirichlet-Reihen ist der Begriff des **Winkelbereichs** von Nutzen.

**(1.5) Definition**
Für $s_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \alpha \leq \pi$ heißt

$$W(s_0, \alpha) = \{s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| \leq \alpha\}$$

Winkelbereich mit Spitze $s_0$ und Öffnungswinkel $2\alpha$.

Aufgrund der Definition gilt

$W(s_0, \alpha) = \{s_0 + re^{it}; r \geq 0, -\alpha \leq t \leq \alpha\}$.

# §2 Konvergenz

## 2.1 Sätze

Winkelbereiche sind von entscheidender Bedeutung bei der Konvergenz der Dirichlet-Reihe. Ihre Konvergenzbereiche sind nämlich im Vergleich zu Potenzreihen nicht Kreise, sondern Winkelbereiche. Dieses beschreibt der folgende Satz.

**(2.1) Satz**
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}$$

die zugehörige Dirichlet-Reihe.
a) Konvergiert $D_f(s)$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert $D_f(s)$ auf jedem Kompaktum in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)\}$ und auf jedem Winkelbereich $W(s_0, \alpha)$ mit $\alpha < \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig.
b) Es gibt ein $\sigma_b = \sigma_b(f) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass die Reihe $D_f(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_b$ konvergiert und für $\mathrm{Re}(s) < \sigma_b$ divergiert.
c)$D_f(s)$ ist auf dem Gebiet $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > \sigma_b\}$ holomorph, wobei die Ableitungen gegeben werden durch

$$D_f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^k \cdot f(n) \cdot n^{-s} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

und diese Reihen für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_b$ ebenfalls konvergieren.

**Beweis:**
a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird $s_0 = 0$ angenommen, da im Falle $s_0 \neq 0$ $s$ durch $s - s_0$ und $f(n)$ durch $f(n) \cdot n^{s_0}$ ersetzt werden kann. Nach der Voraussetzung folgt die Konvergenz von $D_f(s)$ in $s = 0$, also

$$D_f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \tag{3}$$

Zusätzlich ist es ausreichend, die gleichmäßige Konvergenz von $D_f(s)$ auf $W(0,\alpha)$ für ein festes, aber beliebiges $\alpha$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu zeigen, denn jedes Kompaktum in der rechten Halbebene liegt schon in $W(0,\alpha)$.
Mithilfe von Gleichung (2) aus dem Abelschen Lemma und $g(n) = n^{-s}$ ergibt sich für $N \geq M \geq 1$

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) \cdot \underbrace{n^{-s}}_{g(n)} = \sum_{n=M}^{N-1} F(M,n) \cdot \left( \underbrace{n^{-s}}_{g(n)} - \underbrace{(n+1)^{-s}}_{g(n+1)} \right) + F(M,N) \cdot \underbrace{N^{-s}}_{g(N)}. \tag{4}$$

Wähle $s = \sigma + it$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right| &= \left| s \cdot \int\limits_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \mathrm{e}^{-sx} dx \right| \leq |s| \cdot \int\limits_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left|\mathrm{e}^{-\sigma x}\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{-itx}\right| dx \\ &= |s| \cdot \int\limits_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \mathrm{e}^{-\sigma x} dx = \frac{|s|}{\sigma} \cdot \left| n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Nach der Definition des Winkelbereichs lässt sich $0 \neq s \in W(0,\alpha)$ als $s = \rho e^{i\phi}$ mit $\rho > 0$ und $-\alpha \leq \phi \leq \alpha$ schreiben. Daraus ergibt sich

$$|s| = \left|\rho e^{i\phi}\right| = |\rho| \left|e^{i\phi}\right| = \rho \qquad \text{und} \qquad \cos(\phi) = \frac{\sigma}{\rho}$$

und es folgt

$$\frac{|s|}{\sigma} = \frac{\rho}{\rho\cos(\phi)} = \frac{1}{\cos(\phi)} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{, da} \quad |\phi| \leq |\alpha| < \frac{\pi}{2}.$$

In Kombination mit (5) erhält man

$$\left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right| \leq \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \left( n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right). \tag{6}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund von (3) und dem Cauchy-Kriterium existiert ein $M_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{n=M}^{N} f(n) \right| = |F(M,N)| < \varepsilon \text{ für alle } N \geq M \geq M_0.$$

Damit folgt für alle $N > M \geq M_0$ und alle $s \in W(0,\alpha)$ mit (4)

$$\left| \sum_{n=M}^{N} f(n) \cdot n^{-s} \right| \leq \sum_{n=M}^{N-1} \underbrace{|F(M,n)|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right|}_{(6)} + \underbrace{|F(M,N)|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\left|N^{-s}\right|}_{N^{-\sigma}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\cos(\alpha)} \sum_{n=M}^{N-1} \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right) + \varepsilon N^{-\sigma}$$
$$= \frac{\varepsilon}{\cos(\alpha)} \underbrace{\left(M^{-\sigma} - N^{-\sigma}\right)}_{\leq M^{-\sigma} \leq 1} + \varepsilon \underbrace{N^{-\sigma}}_{\leq 1} \leq \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} + 1\right) \varepsilon,$$

da $M^{-\sigma} \leq 1$ und $N^{-\sigma} \leq 1$ aufgrund von $M \geq 1$ und $N \geq 1$, sowie $\sigma > 0$.
Damit folgt nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen die gleichmäßige Konvergenz von $D_f(s)$ in $W(0, \alpha)$.
b) Die Behauptung folgt mit

$$\sigma_b := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}; \text{es existiert } s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \text{ so dass } D_f(s) \text{ konvertiert}\},$$

da $\sigma_b$ die größte untere Schranke der Menge aller $\sigma$ ist für die $s = \sigma + it$ konvergiert. Das heißt alle $s$ rechts von $\sigma_b$ konvergieren und alle $s$ links von $\sigma_b$ divergieren.
c) Aufgrund der Holomorphie von $f(n) \cdot n^{-s}$ und der lokal gleichmäßigen Konvergenz aus Teil a folgt nach dem Satz von Weierstrass die Holomorphie der Grenzfunktion $D_f(s)$.
Zusätzlich konvergiert die Reihe der $k$-ten Ableitung

$$\left(f(n) \cdot n^{-s}\right)^{(k)} = \left(f(n) \cdot \mathrm{e}^{-\ln(n) \cdot s}\right)^{(k)} = \left(f(n) \cdot (-1)^k \cdot (\ln(n))^k \cdot n^{-s}\right)$$

lokal gleichmäßig gegen

$$D_f^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \left(\ln(n)\right)^k \cdot f(n) \cdot n^{-s}. \qquad \square$$

Im folgenden Korollar wird der Grenzwert der Dirichlet-Reihe auf Parallelen zur reellen Achse betrachtet.

**(2.2) Korollar**
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion mit $\sigma_b(f) < \infty$. Dann gilt für alle $f \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\sigma \to \infty} D_f(\sigma + it) = f(1).$$

**Beweis:**
Summation und Limesbildung dürfen vertauscht werden, da $D_f(\sigma + it)$ für ein $\alpha$ und ein $s_0$ in $W(s_0, \alpha)$ lokal gleichmäßig konvergiert. Damit ergibt sich

$$\lim_{\sigma \to \infty} D_f(\sigma + it) = \lim_{\sigma \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-\sigma - it} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \lim_{\sigma \to \infty} n^{-\sigma - it} = f(1)$$

aufgrund von $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \dfrac{1}{n^{\sigma+it}} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 0 \end{cases}.$ □

Der folgende Satz befasst sich mit der absoluten Konvergenz von Dirichlet-Reihen. Im Gegensatz zu Potenzreihen kann es bei Dirichlet-Reihen zu unterschiedlichen Bereichen der Konvergenz und absoluten Konvergenz kommen. Dieses Phänomen wird im folgenden Satz beschrieben und anschließend an einigen Beispielen erläutert.

**(2.3) Satz**
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}$$

die zugehörige Dirichlet-Reihe.
a) Konvergiert $D_f(s)$ für ein $s = s_0 \in \mathbb{C}$ absolut, so konvergiert die Reihe $D_f(s)$ in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)\}$ absolut gleichmäßig.
b) Es gibt ein $\sigma_a = \sigma_a(f) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass die Reihe $D_f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ absolut konvergiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$ nicht absolut konvergiert. Dabei gilt

$$\sigma_b \leq \sigma_a \leq \sigma_b + 1.$$

**Beweis:**
a) Sei $s_0 = \sigma_0 + it_0$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ und nach Voraussetzung $\mathrm{Re}(s) = \sigma \geq \sigma_0 = \mathrm{Re}(s_0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left|f(n) \cdot n^{-s}\right| &= \sum_{n=1}^{N} |f(n)| \cdot \left|n^{-\sigma}\right| \cdot \underbrace{\left|n^{-it}\right|}_{=1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} |f(n)| \cdot n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{N} |f(n)| \cdot n^{-\sigma_0} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma_0} < \infty. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt aufgrund der absoluten Konvergenz von $D_f(s)$ in $s_0$. Somit erhält man die absolut gleichmäßige Konvergenz in der gewünschten Halbebene.

b) Analog zu Satz (3.2b) definiert man

$$\sigma_a = \sigma_a(f) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}; D_f(\sigma) \text{ konvergiert absolut}\}.$$

Der erste Teil der Ungleichung ($\sigma_b \leq \sigma_a$) folgt, da absolute Konvergenz einer Reihe ihre Konvergenz impliziert.
Sei nun $\sigma > \sigma_b + 1$. Falls $D_f(\sigma)$ absolut konvergiert, folgt die zweite Ungleichung $\sigma_a \leq \sigma_b + 1$ der Behauptung. Aus $\sigma > \sigma_b + 1$ folgt $\sigma - 1 > \sigma_b$ und damit die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-(\sigma-1)}$. Aufgrund der Konvergenz ist $\left(f(n) \cdot n^{-\sigma+1}\right)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und damit beschränkt durch ein $c > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} \left| f(n) \cdot n^{-(\sigma+\varepsilon)} \right| = \sum_{n=1}^{N} \left| f(n) \cdot n^{-(\sigma+1)} \right| \left| n^{-(1+\varepsilon)} \right| \leq c \cdot \sum_{n=1}^{N} n^{-(1+\varepsilon)} \leq c \cdot \zeta(1+\varepsilon) < \infty$$

mit $\mathrm{Re}(1+\varepsilon) > 1$ und der konvergenten Zetafunktion.
Damit folgt die absolute Konvergenz von $D_f(\sigma + \varepsilon)$ für alle $\sigma > \sigma_b + 1$ und alle $\varepsilon > 0$ und somit $\sigma_a \leq \sigma_b + 1$. $\square$

Man nennt $\sigma_b(f)$ die Konvergenzabszisse der bedingen Konvergenz und $\sigma_a(f)$ die Konvergenzabszisse der absoluten Konvergenz von $D_f(s)$.

*— Beispiele —*

a) Sei $f(n) = 1$ und damit $D_f(s) = \zeta(s)$. Die Zetafunktion konvergiert (absolut) für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und damit $\sigma_a = \sigma_b = 1$.

b) Sei $f(n) = (-1)^n$ und damit

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^{-s}.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert $D_f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^{-\sigma}$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$, da $\left(\frac{1}{n^\sigma}\right)_{n\geq 0}$ in diesem Fall eine monoton fallende Nullfolge ist. Also gilt $\sigma_b = 0$ und $\sigma_a = 1$.

c) Sei $f(n) = n^n$. Damit ist

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot n^{-s}$$

divergent, da $n^n \cdot n^{-s} = n^{n-s} \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und somit keine Nullfolge ist. Es folgt $\sigma_a = \sigma_b = \infty$.

d) Sei $f(n) = n^{-n}$. Damit ist

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \cdot n^{-s}$$

nach dem Wurzelkriterium konvergent auf ganz $\mathbb{C}$, da $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \cdot n^{-\frac{s}{n}} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0 < 1$ für alle $s \in \mathbb{C}$. Es folgt $\sigma_a = \sigma_b = -\infty$.

## 2.2 Konvergenzabszisse

— *Satz* —

Analog zum Satz von Cauchy-Hadamard für Potenzreihen gilt für Dirichlet-Reihen das folgende Kriterium.

**(2.4) Satz**
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und

$$F(x) = \sum_{n\leq x} f(n), \qquad x \geq 0, \qquad D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}.$$

Wenn $D_f(s)$ an der Stelle $s = 0$ divergiert, so gilt

$$\sigma_b = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|F(N)|}{\ln(N)} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; F(x) = \mathcal{O}(x^\alpha) \text{ für } x \geq 1\}. \tag{7}$$

**Beweis:** Setze $\gamma = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; F(x) = \mathcal{O}(x^\alpha) \text{ für } x \geq 1\}$. Damit gilt $\gamma \geq 0$. Aufgrund der Divergenz von $D_f(s)$ bei $s = 0$ folgt aus Satz (3.2), dass $\sigma_b \geq 0$.

**1. Behauptung:** $\sigma_b \geq \gamma$
**Beweis:** Für $\sigma_b = \infty$ ist nichts zu zeigen.
Sei $\sigma_b < \infty$ und $\sigma > \sigma_b$. Aufgrund von $\mathrm{Re}(\sigma) = \sigma > \sigma_b$ konvergiert die Reihe $D_f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-\sigma}$, daher existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $c > 0$ mit

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot n^{-\sigma} \right| \leq c. \tag{8}$$

Mit (2), $M = 1$, $\tilde{f}(n) = f(n) \cdot n^{-\sigma}$ und $g(n) = n^{\sigma}$ folgt

$$\begin{aligned}
|F(N)| &= \left| \sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot \underbrace{1}_{=n^{-\sigma}\cdot n^{\sigma}} \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left(f(n) \cdot n^{-\sigma}\right)}_{\tilde{f}(n)} \cdot \underbrace{n^{\sigma}}_{g(n)} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right)}_{\tilde{F}(1,n)} \cdot \left( \underbrace{n^{\sigma}}_{g(n)} - \underbrace{(n+1)^{\sigma}}_{g(n+1)} \right) + \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{N} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right)}_{\tilde{F}(1,N)} \cdot \underbrace{N^{\sigma}}_{g(N)} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right|}_{\leq c} \cdot \left((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma}\right) + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{N} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right|}_{\leq c} \cdot N^{\sigma} \\
&\leq c \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \left((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma}\right)}_{=N^{\sigma}-1^{\sigma}} + c \cdot N^{\sigma} \\
&= c \cdot (2N^{\sigma} - 1) \leq 2c \cdot N^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Also gilt nach der Definition von $\gamma$, dass $\sigma \geq \gamma$ für alle $\sigma > \sigma_b$ und damit folgt die Behauptung.

**2. Behauptung:** $\gamma \geq \sigma_b$
**Beweis:** Für $\gamma = \infty$ ist nichts zu zeigen.
Sei $\gamma < \infty$ und $\sigma > \gamma$.
Mit (2), $M = 1$ und $g(n) = n^{-\sigma}$ folgt

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot \underbrace{n^{-\sigma}}_{g(n)} = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{F(n)}_{F(1,n)} \cdot \left( \underbrace{n^{-\sigma}}_{g(n)} - \underbrace{(n+1)^{-\sigma}}_{g(n+1)} \right) + \underbrace{F(N)}_{F(1,N)} \cdot \underbrace{N^{-\sigma}}_{g(N)}. \tag{9}$$

Sei $\alpha$ mit $\gamma < \alpha < \sigma$. Es gibt ein $c > 0$ mit $|F(N)| \leq c \cdot N^{\alpha}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Damit erhält man mit $\frac{1}{x^{\sigma+1}} \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}}$ für $n \leq x \leq n+1$

$$\begin{aligned}
\left| F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right) \right| &= \underbrace{|F(n)|}_{\leq c \cdot n^{\alpha}} \cdot \left| \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right) \right| \\
&\leq c \cdot n^{\alpha} \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$$= c \cdot n^\alpha \cdot \sigma \int\limits_n^{n+1} x^{-\sigma-1} dx$$

$$\leq c \cdot \sigma \cdot n^\alpha \underbrace{\int\limits_n^{n+1} n^{-\sigma-1} dx}_{((n+1)-n)\cdot n^{-\sigma-1}} = c \cdot \sigma \cdot n^{\alpha-\sigma-1}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left|F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right)\right| \leq c \cdot \sigma \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{\alpha-\sigma-1} \leq c \cdot \sigma \cdot \zeta\left(\sigma + 1 - \alpha\right) < \infty$$

mit $\mathrm{Re}(\sigma + 1 - \alpha) = \sigma + 1 - \alpha > 1$, da $\sigma > \alpha$. Daraus folgt die absolute Konvergenz und damit auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |F(n) \cdot (n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})|$.
Zusätzlich gilt

$$\left|F(N) \cdot N^{-\sigma}\right| \leq c \cdot N^{\alpha-\sigma} \to 0 \text{ für } N \to \infty,$$

da $\sigma > \alpha$. Damit existiert der folgende Limes und der Grenzwert berechnet sich mit (9) zu

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N-1} F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right) + F(N) \cdot N^{-\sigma} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot n^{-\sigma} = D_f(\sigma).$$

Aus der Konvergenz von $D_f(\sigma)$ ergibt sich $\sigma \geq \sigma_b$ für alle $\sigma > \gamma$ und damit folgt die Behauptung.

Aus Behauptung 1 ($\sigma_b \geq \gamma$) und Behauptung 2 ($\gamma \geq \sigma_b$) folgt die zweite Äquivalenz des Satzes ($\sigma_b = \gamma$).

**3. Behauptung:** $\beta := \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|F(N)|}{\ln(N)} = \gamma$
**Beweis:** Sei $\sigma > \gamma$ und daher existiert ein $c > 0$ mit $|F(N)| \leq c \cdot N^\sigma$. Daraus folgt

$$\frac{\ln|F(N)|}{\ln(N)} \leq \frac{\ln(c)}{\ln(N)} + \sigma \to \sigma \text{ für } N \to \infty$$

und damit $\sigma \geq \beta$ für alle $\sigma > \gamma$, also $\gamma \geq \beta$.
Sei $\sigma > \beta$ und damit $\frac{\ln|F(N)|}{\ln(N)} \leq \sigma$ für alle $N \geq N_0$ mit einem $N_0 \in \mathbb{N}$, also

$$|F(N)| \leq N^\sigma \quad \text{und} \quad |F(x)| = |F(\lfloor x \rfloor)| \leq \lfloor x \rfloor^\sigma \leq x^\sigma \text{ für } x \geq N_0.$$

Daher folgt

$$|F(x)| \leq c \cdot x^{\sigma} \text{ mit } c := \max\{1, \left|F(n)n^{-\sigma}\right| ; 1 \leq n < N_0\}.$$

Damit gilt $F(x) = \mathcal{O}(x^{\sigma})$, also $\sigma \geq \gamma$ für alle $\sigma > \beta$ und somit $\beta \geq \gamma$. □

Die Konvergenzabszisse der absoluten Konverenz berechnet sich über $\sigma_a = \sigma_b(|f|)$.

— *Beispiele* —

a) Siehe (2.1.1a). Für $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma_b(f) = \sigma_a(f) &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|F(N)|}{\ln(N)} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N} |f(n)|\right|}{\ln(N)} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N} f(n)\right|}{\ln(N)} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N} 1\right|}{\ln(N)} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(N)}{\ln(N)} = 1.\end{aligned}$$

Das Kriterium ist anwendbar, da $D_f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ und somit $D_f(s)$ divergent in $s = 0$, da $(1)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge ist.

b) Siehe (2.1.1b).

$$\begin{aligned}\sigma_a = \sigma_b(|f|) &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N} |f(n)|\right|}{\ln(N)} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N} |(-1)^n|\right|}{\ln(N)} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(N)}{\ln(N)} = 1\end{aligned}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N} f(n)\right|}{\ln(N)} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln \overbrace{\left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^n\right|}^{=|-1+1-1+\ldots|\leq 1}}{\ln(N)} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(1)}{\ln(N)} = 0$$
$$\Rightarrow \sigma_b = 0$$

Analog zu Beispiel a ist auch hier $((-1)^n)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge und damit das Kriterium anwendbar.

c) Sei $f(n) = \begin{cases} 12, & \text{falls } 13|n \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$ und damit $F(13 \cdot n + i) = -i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq 12$, da $F(13) = F(26) = ... = 0$. Somit ergibt sich $|F(x)| \leq 12$ und damit

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|F(N)|}{\ln(N)} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(12)}{\ln(N)} \leq 0.$$

Daraus folgt $\sigma_b = 0$.
Das Kriterium ist anwendbar aufgrund der Divergenz von $D_f(s)$ in $s = 0$. Diese folgt nach dem Trivialkriterium aus der unbestimmten Divergenz von $(f(n))_{n\geq 1}$, da die Teilfolgen $(f(13n))_{n\geq 1}$ und $(f(13n+1))_{n\geq 0}$ mit 0 und $-1$ unterschiedliche Grenzwerte haben.
$\sigma_a$ wird über die zweite Definition der Konvergenzabszisse in (7) berechnet. Aus $F_{|f|}(x) = \sum_{n\leq x} |f(n)|$ ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq 12$

$$F_{|f|}(13n+i) = 24n + i = (13n+i) \cdot \frac{24}{13} - \frac{11}{13}i.$$

Damit folgt $F_{|f|}(x) = \mathcal{O}(x)$ und somit $\sigma_a = \gamma = 1$.

d) Sei $f(n) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{falls } n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Damit hat die Dirichlet-Reihe die Form

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m^2} \cdot (m^2)^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m^2} \cdot m^{-2s} = D_{\tilde{f}}(2s)$$

mit $\tilde{f}(m) = (-1)^{m^2}$.

$$\sigma_a(\tilde{f}) = \sigma_b(|\tilde{f}|) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{m=1}^{N} \left|(-1)^{m^2}\right|\right|}{\ln(N)} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|N \cdot 1|}{\ln(N)} = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_a(f) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_b(\tilde{f}) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln \overbrace{\left|\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m^2}\right|}^{=|-1+1-1+...|\leq 1}}{\ln(N)} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(1)}{\ln(N)} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_b(f) = 0$$

Analog zu Beispiel c ist auch hier das Kriterium anwendbar aufgrund der unbestimmten Divergenz der Folge $(f(n))_{n\geq 1}$. Die beiden Teilfolgen $\big(f(2n^2)\big)_{n\geq 1}$ und $\big(f(n^2+1)\big)_{n\geq 0}$ haben mit 1 und 0 zwei verschiedene Grenzwerte.

e) Sei $D_f(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^2} \cdot n^{-s}$. Für $\sigma = 1$ ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^2} n^{-1}$ nach dem Integralvergleichskriterium konvergent, da

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{\ln(x)^2} x^{-1} \mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x\cdot \ln(x)^2} \mathrm{d}x \text{ mit } u = \ln(x)\\ &= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{u}\Big|_{\ln(2)}^{\ln(b)}\\ &= \underbrace{\lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln(b)}}_{=0} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} < \infty\end{aligned}$$

und damit konvergent. Für $\sigma < 1$ divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium, da

$$\frac{n^{-\sigma}}{\ln(n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{n^{1-\sigma}}{\ln(n)^2}}_{\geq 1} \geq \frac{1}{n} \text{ für } n \geq N_0,$$

und die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Somit ist $\sigma_a = 1$.

f) Sei $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-ns}$ und somit $a_n = (2n)^{-n\sigma}$. Für $s = 0$ folgt

$$D_f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \to \infty$$

und damit die Divergenz. Für $\sigma > 0$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2n)^{-n\sigma}} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{-\sigma} = 0.$$

Somit ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent für $\sigma > 0$ und divergent für $s = 0$, womit $\sigma_a = 0$ folgt.

g) Sei $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot n^{-s}$ und somit $a_n = 2^{-n} n^{-\sigma}$. Damit ergibt sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{-(n+1)}\,(n+1)^{-\sigma}}{2^{-n} n^{-\sigma}}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\sigma}\right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \left( 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \right)^{-\sigma} \right| \to \left| \frac{1}{2} \cdot 1^{-\sigma} \right| = \frac{1}{2} < 1 \text{ für } n \to \infty$$

und somit nach dem Quotientenkriterium die Konvergenz für alle $\sigma$. Daraus folgt $\sigma_a = -\infty$.