

# **Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen und Produkte von Dirichlet-Reihen**

Ausarbeitung zum Seminar

*Funktionentheorie*

Vortrag 16.04.2012

GABRIELA ANSTEEG

Ziel dieses Vortrags ist es, die analytische Theorie der DIRICHLET-Reihen aus dem vorherigen Vortrag fortzuführen. Dazu werden zunächst zahlentheoretische Funktionen eingeführt und grundlegende Eigenschaften erarbeitet, mit deren Hilfe sich anschließend Aussagen über Produkte von DIRICHLET-Reihen treffen lassen.

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

### (1.1) Definition (zahlentheoretische / arithmetische Funktion).

Eine zahlentheoretische oder arithmetische Funktion ist eine Abbildung

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Die Menge aller zahlentheoretischen Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}$ .

### (1.2) Beispiele.

Beispiele zahlentheoretischer Funktionen sind

a)  $e(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n > 1. \end{cases}$

b)  $i_k(n) := n^k$  für ein festes  $k \in \mathbb{C}$ , speziell  $i(n) := i_0(n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

c)  $\tau(n) := \#\{d \in \mathbb{N}; d \mid n\}$ , die Teileranzahl von  $n \in \mathbb{N}$ .

d)  $\sigma(n) := \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}: \\ d \mid n}} d$ , die Teilersumme von  $n \in \mathbb{N}$ .

Definiert man für  $f, g \in \mathcal{A}$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$  die Addition, Multiplikation und skalare Multiplikation auf  $\mathcal{A}$  punktweise, also durch

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n),$$

$$(f \cdot g)(n) := f(n) \cdot g(n),$$

$$(\alpha f)(n) := \alpha f(n),$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so wird  $\mathcal{A}$  zu einer  $\mathbb{C}$ -Algebra.

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

Es wird sich als hilfreich erweisen, eine weitere Verknüpfung einzuführen:

### (1.3) Definition (Faltung / Dirichlet-Faltung).

Für  $f, g \in \mathcal{A}$  definiert man die *Faltung* oder *DIRICHLET-Faltung*  $f * g \in \mathcal{A}$  durch

$$(f * g)(n) := \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ ab=n}} f(a) \cdot g(b) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{c|n} f\left(\frac{n}{c}\right) \cdot g(c),$$

wobei „ $d | n$ “ alle positiven Teiler  $d$  von  $n$  bezeichnet.

### (1.4) Beispiele.

a)  $(i * i)(n) = \sum_{d|n} i(d) \cdot i\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n),$  d.h.  $i * i = \tau.$

b)  $(i_1 * i)(n) = \sum_{d|n} i_1(d) \cdot i\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d = \sigma(n),$  d.h.  $i_1 * i = \sigma.$

c) Allgemein ist die *Teilersumme vom Gewicht  $k \in \mathbb{C}$*  gegeben durch

$$(i_k * i)(n) = \sum_{d|n} i_k(d) \cdot i\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^k =: \sigma_k(n),$$
 d.h.  $i_k * i = \sigma_k.$

Somit ist  $\sigma_1 = \sigma$  und  $\sigma_0 = \tau.$

Weitere wichtige zahlentheoretische Funktionen beinhaltet die folgende

### (1.5) Definition ( $\varphi$ -Funktion, $\mu$ -Funktion, $\Lambda$ -Funktion).

a) Die *EULERSche phi-Funktion*  $\varphi \in \mathcal{A}$  ist definiert durch

$$\varphi(n) := \#\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \text{ggT}(k, n) = 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Die *MÖBIUSSche my-Funktion*  $\mu \in \mathcal{A}$  ist definiert durch  $\mu(1) := 1$  und

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k, p_i \in \mathbb{P} \text{ paarweise verschieden,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad n > 1.$$

c) Die *MANGOLDTSche Lambda-Funktion*  $\Lambda \in \mathcal{A}$  ist definiert durch

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln(p), & \text{falls } n = p^k \text{ für ein } p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir kommen nun zu einigen speziellen DIRICHLET-Faltungen.

**(1.6) Satz.**

a) Es gilt  $\mu * i = e$ , d.h.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = e(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n > 1, \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Es gilt  $\varphi * i = i_1$ , d.h.

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Es gilt  $\mu * i_1 = \varphi$ , d.h.

$$\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \varphi(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

d) Es gilt  $\Lambda * i = \ln$ , d.h.

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis.**

a) Für  $n = 1$  gilt

$$(\mu * i)(1) = \sum_{d|1} \mu(d) \cdot 1 = \mu(1) = 1 = e(1).$$

Für  $n > 1$  sei  $n = p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$ . Beachtet man, dass die  $\mu$ -Funktion nur für quadratfreie natürliche Zahlen einen Wert ungleich Null liefert, erhält man

$$\begin{aligned} (\mu * i)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \cdot 1 = 1 + \sum_{\substack{d|n, \\ d>1}} \mu(d) = 1 + \sum_{j=1}^k \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} \mu(p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j}) \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^k \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} (-1)^{i_j} \right) = 1 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \cdot 1^{k-j} = (-1 + 1)^k = 0 = e(n). \end{aligned}$$

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

---

b) Für  $d \mid n$  sei

$$\begin{aligned} A(d) &:= \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \text{ggT}(k, n) = d\} \\ &= \{r \cdot d \in \mathbb{N}; 1 \leq r \leq \frac{n}{d}, \text{ggT}(r, \frac{n}{d}) = 1\}. \end{aligned}$$

Also ist  $\#A(d) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ . Zusammen mit

$$\bigcup_{d \mid n} A(d) = \{1, \dots, n\}, \quad A(d) \cap A(d') = \emptyset \quad \text{für } d \neq d',$$

ergibt sich daher

$$n = \#\{1, \dots, n\} = \#\bigcup_{d \mid n} A(d) = \sum_{d \mid n} \#A(d) = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \varphi(d),$$

wobei im letzten Schritt die Gleichheit der beiden Mengen  $\{d \in \mathbb{N}; d \mid n\}$  und  $\{\frac{n}{d} \in \mathbb{N}; d \mid n\}$  eingeht.

c) Mit der Definition von  $\varphi$  und  $e$  sowie mit Teil a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\text{ggT}(k, n)} \right] = \sum_{k=1}^n e(\text{ggT}(k, n)) \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{d \mid \text{ggT}(k, n)} \mu(d) \right) = \sum_{\substack{d \mid \text{ggT}(k, n), \\ 1 \leq k \leq n}} \mu(d) = \sum_{\substack{(k, d): \\ 1 \leq k \leq n, d \mid k, d \mid n}} \mu(d), \end{aligned}$$

wobei für  $k, n \in \mathbb{N}$  die Gleichheit der beiden Mengen  $\{d \in \mathbb{N}; d \mid \text{ggT}(k, n)\}$  und  $\{d \in \mathbb{N}; d \mid k, d \mid n\}$  eingeht. Mit  $k = qd$  erhält man schließlich

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{(q, d): \\ 1 \leq q \leq \frac{n}{d}, d \mid n}} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

d) Für  $n = 1$  gilt

$$(\Lambda * i)(1) = \sum_{d \mid 1} \Lambda(d) \cdot 1 = \Lambda(1) = 0 = \ln(1).$$

Für  $n > 1$  sei  $n = p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$ . Für einen Teiler  $d$  von  $n$  ist die  $\Lambda$ -Funktion nur ungleich Null, wenn  $d = p_j^{\beta_j}$  gilt, mit  $1 \leq j \leq k$  und

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

$1 \leq \beta_j \leq v_j$ . Somit hat man

$$\begin{aligned} (\Lambda * i)(n) &= \sum_{d|n} \Lambda(d) \cdot 1 = \sum_{j=1}^k \sum_{\beta_j=1}^{v_j} \Lambda(p_j^{\beta_j}) = \sum_{j=1}^k \sum_{\beta_j=1}^{v_j} \ln(p_j) \\ &= \sum_{j=1}^k v_j \ln(p_j) = \ln(p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}) = \ln(n). \end{aligned} \quad \square$$

Wir schauen uns nun die Struktur von  $\mathcal{A}$  genauer an.

### (1.7) Lemma.

$(\mathcal{A}, +, *)$  ist ein Integritätsring mit Einselement  $e$ .

#### Beweis.

Gezeigt werden muss also, dass  $(\mathcal{A}, +, *)$  ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement  $e$  ist.

(i)  $(\mathcal{A}, *)$  ist kommutativ, denn nach Definition gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ ab=n}} f(a)g(b) = \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ cd=n}} g(c)f(d) = (g * f)(n).$$

(ii)  $(\mathcal{A}, +)$  ist durch die punktweise definierte Addition eine abelsche Gruppe.  
 $(\mathcal{A}, *)$  ist eine Halbgruppe, denn für  $f, g, h \in \mathcal{A}$  gilt das Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(n) &= \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ ab=n}} (f * g)(a)h(b) \\ &= \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ ab=n}} \left( \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ cd=a}} f(c)g(d) \right) h(b) \\ &= \sum_{\substack{(c,d,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ cdb=n}} f(c)g(d)h(b) \\ &= \sum_{\substack{(c,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ cl=n}} f(c) \left( \sum_{\substack{(d,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ db=l}} g(d)h(b) \right) \\ &= \sum_{\substack{(c,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \\ cl=n}} f(c)(g * h)(l) \\ &= (f * (g * h))(n), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

Die Distributivgesetze folgen ebenfalls aus den Definitionen. Mit der Nullfunktion als neutralem Element bzgl.  $+$  ist  $(\mathcal{A}, +, *)$  somit ein Ring.

(iii) Wegen

$$(f * e)(n) = \sum_{d|n} f(d)e\left(\frac{n}{d}\right) = f(n), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und der Kommutativität von  $(\mathcal{A}, *)$  ist  $e$  das Einselement.

(iv) Für die Nullteilerfreiheit ist zu zeigen:

$$f * g = 0 \Rightarrow f = 0 \vee g = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{A}.$$

Seien  $f, g \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$  und

$$m := \min\{k \in \mathbb{N}; f(k) \neq 0\}, \quad n := \min\{k \in \mathbb{N}; g(k) \neq 0\}.$$

Damit erhält man

$$(f * g)(mn) = \sum_{ab=mn} f(a)g(b) = \sum_{\substack{a \geq m, b \geq n, \\ ab=mn}} f(a)g(b) = f(m)g(n) \neq 0,$$

d.h.  $f * g \neq 0$ . Also ist  $(\mathcal{A}, +, *)$  nullteilerfrei. □

### (1.8) Lemma.

$e$  ist die einzige Idempotente in  $\mathcal{A}$ , d.h. die einzige Funktion  $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ , die  $f * f = f$  erfüllt.

### Beweis.

Es gilt  $e \neq 0$  und

$$\begin{aligned} (e * e)(1) &= \sum_{d|1} e(d)e\left(\frac{1}{d}\right) = e(1)e(1) = 1 = e(1), \\ (e * e)(n) &= \sum_{d|n} e(d)e\left(\frac{n}{d}\right) = \underbrace{e(1)e(n)}_{=0} + \sum_{\substack{d|n, \\ 1 < d < n}} \underbrace{e(d)}_{=0} \underbrace{e\left(\frac{n}{d}\right)}_{=0} + \underbrace{e(n)e(1)}_{=0} = 0 \\ &= e(n), \quad n > 1, \end{aligned}$$

also ist  $e$  eine Idempotente. Angenommen,  $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ ,  $f \neq e$ , ist eine weitere Idempotente. Wegen

$$(f * f)(1) = \sum_{d|1} f(d)f\left(\frac{1}{d}\right) = f(1)f(1) = f(1)$$

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

---

muss  $f(1) = 0$  oder  $f(1) = 1$  gelten.

1. Fall:  $f(1) = 0$ .

Wir zeigen per Induktion nach  $n$ , dass dann schon  $f \equiv 0$  gelten muss.

(IA) Es gilt  $f(1) = 0$ .

(IV) Für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $f(k) = 0$  für alle  $k \leq n$ .

(IS)  $n \mapsto n + 1$  :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (f * f)(n+1) = \sum_{d|n+1} f(d) f\left(\frac{n+1}{d}\right) \\ &= \underbrace{f(1)}_{=0} f(n+1) + \sum_{\substack{d|n+1, \\ 1 < d < n+1}} \underbrace{f(d)}_{\substack{=0 \\ \text{nach (IV)}}} f\left(\frac{n+1}{d}\right) + f(n+1) \underbrace{f(1)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung mit dem Prinzip der vollständigen Induktion.

2. Fall:  $f(1) = 1$ .

Wir zeigen per Induktion nach  $n$ , dass dann  $f(n) = 0$  für alle  $n > 1$  gelten muss, also insgesamt  $f \equiv e$ .

(IA) Für  $n = 2$  gilt

$$\begin{aligned} f(2) &= (f * f)(2) = \sum_{d|2} f(d) f\left(\frac{2}{d}\right) = f(1)f(2) + f(2)f(1) \\ &= 2 \underbrace{f(1)}_{=1} f(2), \end{aligned}$$

woraus  $f(2) = 0$  folgt.

(IV) Für ein beliebiges, aber festes  $n > 1$  gelte  $f(k) = 0$  für alle  $2 \leq k \leq n$ .

(IS)  $n \mapsto n + 1$  :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (f * f)(n+1) = \sum_{d|n+1} f(d) f\left(\frac{n+1}{d}\right) \\ &= f(1)f(n+1) + \sum_{\substack{d|n+1, \\ 1 < d < n+1}} \underbrace{f(d)}_{\substack{=0 \\ \text{nach (IV)}}} f\left(\frac{n+1}{d}\right) + f(n+1)f(1) \\ &= 2 \underbrace{f(1)}_{=1} f(n+1), \end{aligned}$$



## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

---

also  $f(n+1) = 0$ .

Daraus folgt die Behauptung mit dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Der erste Fall liefert uns also die Nullfunktion, welche nach Definition keine Idempotente ist, im zweiten Fall erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme  $f \neq e$ . Somit ist  $e$  die einzige Idempotente in  $\mathcal{A}$ .  $\square$

Wir kommen nun zu einer Beschreibung der Einheiten von  $\mathcal{A}$ .

### (1.9) Lemma.

Ein Element  $f \in \mathcal{A}$  ist genau dann eine Einheit im Ring  $(\mathcal{A}, +, *)$ , wenn  $f(1) \neq 0$ . Das Inverse ist dann gegeben durch

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n, \\ d>1}} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right), \quad n \in \mathbb{N}, n > 1. \quad (*)$$

$f^{-1}$  wird auch als das DIRICHLET-Inverse von  $f$  bezeichnet.

### Beweis.

Sei  $f \in \mathcal{A}$ . Ist  $f$  eine Einheit, so gibt es ein  $g \in \mathcal{A}$ , sodass  $f * g = e$  gilt. Damit hat man

$$1 = e(1) = (f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d) g\left(\frac{1}{d}\right) = f(1)g(1),$$

d.h.  $f(1) \neq 0$ .

Falls umgekehrt  $f(1) \neq 0$  gilt, kann man  $f^{-1} \in \mathcal{A}$  über (\*) rekursiv definieren. Damit ist

$$(f * f^{-1})(1) = \sum_{d|1} f(d) f^{-1}\left(\frac{1}{d}\right) = f(1) f^{-1}(1) = 1 = e(1)$$

und für  $n > 1$

$$(f * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = f(1) f^{-1}(1) + \sum_{\substack{d|n, \\ d>1}} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = 0 = e(n).$$

Somit gilt  $f * f^{-1} = e$ .  $\square$

*Erinnerung:*

Eine Nicht-Einheit  $0 \neq f \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$  heißt *irreduzibel*, falls gilt:

$$f = g * h \quad \text{mit } g, h \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad g \in \mathcal{A}^* \vee h \in \mathcal{A}^*.$$

Mit den bisherigen Resultaten erhalten wir einige Charakterisierungen irreduzibler zahlentheoretischer Funktionen.

**(1.10) Lemma.**

a) Sei  $f \in \mathcal{A}$  keine Einheit. Wenn es eine Primzahl  $p \in \mathbb{P}$  gibt mit  $f(p) \neq 0$ , so ist  $f$  irreduzibel.

b) Sei  $f \in \mathcal{A}$ . Wenn gilt

$$f(n) = 0 \Leftrightarrow n = p^\nu \quad \text{mit } p \in \mathbb{P} \text{ und } \nu \in \mathbb{N}_0,$$

so ist  $f$  irreduzibel.

c) Die zahlentheoretische Funktion  $\delta_N$  definiert durch

$$\delta_N(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = N, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist genau für  $N = p \in \mathbb{P}$  irreduzibel.

**Beweis.**

a) Sei also  $f \notin \mathcal{A}^*$ , d.h.  $f(1) = 0$  nach (1.9), und es existiere ein  $p \in \mathbb{P}$  mit  $f(p) \neq 0$ . Weiter seien  $g, h \in \mathcal{A}$  mit  $f = g * h$ . Dann gilt

$$0 = f(1) = (g * h)(1) = \sum_{d|1} g(d)h\left(\frac{1}{d}\right) = g(1)h(1),$$

also folgt  $g(1) = 0$  oder  $h(1) = 0$ . Ohne Einschränkung sei  $g(1) = 0$ . Damit gilt weiter

$$\begin{aligned} f(p) &= (g * h)(p) = \sum_{d|p} g(d)h\left(\frac{p}{d}\right) \\ &= \underbrace{g(1)}_{=0} h(p) + g(p)h(1) \\ &= g(p)h(1). \end{aligned}$$

Wegen  $f(p) \neq 0$  folgt  $h(1) \neq 0$ , also  $h \in \mathcal{A}^*$ . Somit ist  $f$  irreduzibel.

b) Seien  $g, h \in \mathcal{A}$  mit  $f = g * h$ . Nach Voraussetzung an  $f$  ist

$$0 = f(1) = (g * h)(1) = \sum_{d|1} g(d)h\left(\frac{1}{d}\right) = g(1)h(1),$$

## §1 Grundlagen zahlentheoretischer Funktionen

---

woraus  $g(1) = 0$  oder  $h(1) = 0$  folgt. Ohne Einschränkung gelte  $g(1) = 0$ . Zu zeigen bleibt also  $h(1) \neq 0$ , denn dann folgt  $h \in \mathcal{A}^*$ . Wir nehmen  $h(1) = 0$  an und wollen dies zum Widerspruch führen. Sei dazu  $p \in \mathbb{P}$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = f(p^2) &= (g * h)(p^2) = \sum_{d|p^2} g(d)h\left(\frac{p^2}{d}\right) \\ &= \underbrace{g(1)}_{=0} h(p^2) + g(p)h(p) + g(p^2) \underbrace{h(1)}_{=0} = g(p)h(p). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $g(p) = 0$  oder  $h(p) = 0$  für jedes beliebige  $p \in \mathbb{P}$ .

Seien nun  $p_1, p_2$  und  $p_3$  drei verschiedene Primzahlen. Dann gelten also

$$\begin{aligned} g(p_1) = 0 \quad \vee \quad h(p_1) = 0, \\ g(p_2) = 0 \quad \vee \quad h(p_2) = 0, \\ g(p_3) = 0 \quad \vee \quad h(p_3) = 0. \end{aligned}$$

Somit gibt es zwei verschiedene Primzahlen  $p, p' \in \{p_1, p_2, p_3\}$ , sodass

$$g(p) = 0 = g(p') \quad \text{oder} \quad h(p) = 0 = h(p')$$

erfüllt ist. In jedem Fall erhält man

$$\begin{aligned} 0 \neq f(pp') &= (g * h)(pp') = \sum_{d|pp'} g(d)h\left(\frac{pp'}{d}\right) \\ &= \underbrace{g(1)}_{=0} h(pp') + \underbrace{g(p)h(p')}_{=0} + \underbrace{g(p')h(p)}_{=0} + g(pp') \underbrace{h(1)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

was den gewünschten Widerspruch liefert. Somit ist  $h(1) \neq 0$ , also  $h \in \mathcal{A}^*$ , und  $f$  daher irreduzibel.

c)  $\delta_N$  ist nach (1.9) genau für  $N = 1$  eine Einheit, da nur dann  $\delta_N(1) = 1 \neq 0$  erfüllt ist. Betrachtet wird im Folgenden also  $N > 1$ .

(i) Für  $N = p \in \mathbb{P}$  gilt  $\delta_p(p) = 1 \neq 0$  und somit ist  $\delta_p$  nach Teil a) irreduzibel.

(ii) Sei nun  $N = p^\nu$  mit  $p \in \mathbb{P}$  und  $\nu > 1$ . Dann definiere für  $n \in \mathbb{N}$  die zahlentheoretischen Funktionen

$$g(n) = \begin{cases} 1, & n = p, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(n) = \begin{cases} 1, & n = p^{\nu-1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

---

Wegen  $g(1) = h(1) = 0$  gilt  $g, h \notin \mathcal{A}^*$  nach (1.9). Für  $n \in N$  und  $d \mid n$  gilt außerdem stets

$$g(d) \cdot h\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & n = p^v \wedge d = p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da der Term  $g(p)h(p^{v-1})$  nur für  $n = p^v$  in  $\sum_{d \mid n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)$  auftaucht, gilt

$$(g * h)(n) = \sum_{d \mid n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & n = p^v, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt  $\delta_N = \delta_{p^v} = g * h$ , mit  $g, h \notin \mathcal{A}^*$ . Somit ist  $\delta_N$  nicht irreduzibel für  $N = p^v$ .

(iii) Zuletzt sei  $N = p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}$  mit  $k > 1$  und  $p_i \in \mathbb{P}$ ,  $v_i \geq 1$  für  $1 \leq i \leq k$ . Dazu definiert man die zahlentheoretischen Funktionen

$$g(n) = \begin{cases} 1, & n = p_1^{v_1}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(n) = \begin{cases} 1, & n = p_2^{v_2} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt mit analoger Argumentation wie in (ii), dass  $\delta_N = g * h$  gilt, wobei wieder  $g, h \notin \mathcal{A}^*$  und somit  $\delta_N$  auch für  $N = p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}$  nicht irreduzibel ist.

Insgesamt ist  $\delta_N$  also nur für  $N = p \in \mathbb{P}$  irreduzibel. □

## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

*Erinnerung:*

Die RIEMANNsche Zetafunktion ist definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Da wir noch mehrfach die Konvergenzabszisse der absoluten Konvergenz von  $\zeta(s)$  benötigen werden, halten wir dies kurz fest in dem folgenden

**(2.1) Lemma.**

Für  $i \equiv 1$ , also  $D_i(s) = \zeta(s)$ , gilt  $\sigma_a = \sigma_a(i) = 1$ .

**Beweis.**

An der Stelle  $s = 0$  divergiert die Zetafunktion, denn  $D_i(0) = \zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$ .  
Für  $x \geq 1$  gilt

$$F(x) = \sum_{n \leq x} i(n) = \sum_{n \leq x} 1 \leq x,$$

also hat man  $F(x) \leq \mathcal{O}(x)$  für  $x \geq 1$ . Außerdem gilt

$$x - 1 \leq \sum_{n \leq x} 1 = F(x),$$

d.h.  $F(x) \geq \mathcal{O}(x)$ . Mit [1] I(4.8) ist deshalb

$$\sigma_b = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; F(x) = \mathcal{O}(x^\alpha) \text{ für } x \geq 1\} = 1,$$

und wegen  $|i(n)| = i(n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $\sigma_a = \sigma_a(i) = \sigma_b(|i|) = 1$ . □

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich Potenzreihen nicht holomorph über ihren Konvergenzkreis hinaus auf größere Kreise fortsetzen lassen (vgl. dazu III (3.4) in [2]). Auch für DIRICHLET-Reihen gilt eine entsprechende Aussage:

**(2.2) Satz (Satz von Landau).**

Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  eine reelle, nicht-negative zahlentheoretische Funktion mit zugehöriger DIRICHLET-Reihe und Konvergenzabszisse  $\sigma_a(f) = \sigma_b(f) \in \mathbb{R}$ . Dann hat die DIRICHLET-Reihe  $D_f(s)$  keine hebbare Singularität an der Stelle  $s = \sigma_a$ , d.h., es gibt keinen Kreis um  $\sigma_a$ , in den man  $D_f(s)$  holomorph fortsetzen kann.

**Beweis.**

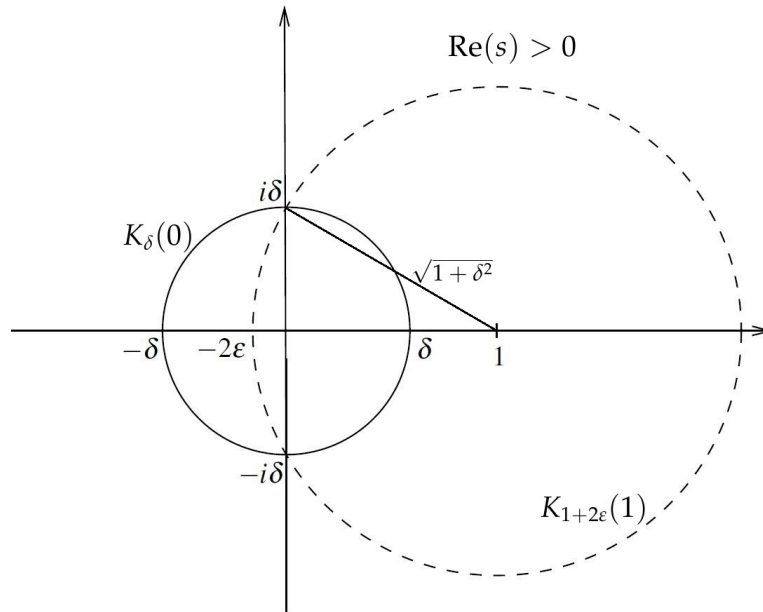
Ohne Einschränkung kann man  $\sigma_a = 0$  annehmen. Ist nämlich  $\sigma_a = s_0 \in \mathbb{R}$  beliebig, so betrachtet man für  $\tilde{f} := f(n)n^{-s_0}$  die Reihe

$$D_{\tilde{f}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0} \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-(s+s_0)} = D_f(s + s_0),$$

also ist  $D_{\tilde{f}}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s_0} = D_f(s_0)$ .

Wir führen den Beweis indirekt:

Angenommen, es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass  $D_f$  auf  $K_\delta(0)$  holomorph ist. Wegen  $\sigma_a = \sigma_b = 0$  ist  $D_f$  nach [1] I(4.4) c) auf  $K_1(1)$  holomorph. Wählt man nun  $\varepsilon > 0$  so, dass  $1 + 2\varepsilon = \sqrt{1 + \delta^2}$  (vgl. Abb.), so ist  $D_f$  auf  $K_{1+2\varepsilon}(1)$  holomorph und besitzt dort somit eine Darstellung als konvergente Potenzreihe.



Mit der TAYLOR-Entwicklung von  $D_f$  um  $1$  und der Formel für die  $k$ -te Ableitung von  $D_f$  aus [1] I(4.4) c) erhält man

$$\begin{aligned}
 D_f(-\epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_f^{(k)}(1)}{k!} (-\epsilon - 1)^k \\
 &\stackrel{(4.4) \text{ c)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^k f(n) n^{-1} \right) (\epsilon + 1)^k (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\epsilon + 1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^k f(n) \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\epsilon + 1)^k (\ln(n))^k}{k!} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((\epsilon + 1) \ln(n))^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \exp((\epsilon + 1) \ln(n)) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} n^{\epsilon+1} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^\epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-(-\epsilon)}.
 \end{aligned}$$

In obiger Rechnung darf die Summationsreihenfolge vertauscht werden, da nach Voraussetzung an  $f$  alle auftretenden Terme in den Summen nicht negativ sind und somit absolute Konvergenz vorliegt (vgl. II (3.1) in [2]).

Die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-(-\epsilon)}$  liefert nun den Widerspruch, denn es ist  $-\epsilon < 0$ , aber  $\sigma_a = \sigma_b = 0$ .  $\square$

## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

Eine weitere Analogie zu den Potenzreihen liegt in der Darstellung der Koeffizienten als Integral.

### (2.3) Lemma.

Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  eine zahlentheoretische Funktion und

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}$$

die zugehörige DIRICHLET-Reihe mit Konvergenzabszisse  $\sigma_a < \infty$ . Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\sigma > \sigma_a$

$$f(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T D_f(\sigma + it) \cdot k^{\sigma+it} dt.$$

### Beweis.

Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\sigma > \sigma_a$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T D_f(\sigma + it) \cdot k^{\sigma+it} dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-(\sigma+it)} \right) \cdot k^{\sigma+it} dt \\ &= \frac{k^\sigma}{2T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \cdot \int_{-T}^T \left( \frac{k}{n} \right)^{it} dt \\ &= \frac{k^\sigma}{2T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \cdot \int_{-T}^T e^{it \ln(k/n)} dt, \end{aligned} \quad (*)$$

wobei die Vertauschbarkeit von Integration und Summation wegen der absolut gleichmäßigen Konvergenz von  $D_f(s)$  auf  $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) \geq \sigma_a + \varepsilon\}$  für  $\varepsilon > 0$  gegeben ist (vgl. I(4.6) a) in [1]).

Für  $n = k$  ist

$$\int_{-T}^T e^{it \ln(k/n)} dt = \int_{-T}^T 1 dt = 2T,$$

andernfalls hat man  $x := \frac{k}{n} \neq 1, x > 0$ , also

$$\int_{-T}^T e^{it \ln(x)} dt = \frac{1}{i \ln(x)} e^{it \ln(x)} \Big|_{t=-T}^{t=T} = \frac{2}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{2i} \left( e^{iT \ln(x)} - e^{-iT \ln(x)} \right) = \frac{2 \sin(T \ln(x))}{\ln(x)}.$$

Weiter mit (\*) gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T D_f(\sigma + it) \cdot k^{\sigma+it} dt &= \frac{k^\sigma}{2T} \cdot \left( \frac{f(k)}{k^\sigma} \cdot 2T + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \cdot \int_{-T}^T e^{it \ln(k/n)} dt \right) \\ &= f(k) + \frac{k^\sigma}{2T} \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} \cdot \frac{2 \sin(T \ln(k/n))}{\ln(k/n)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} f(k), \end{aligned}$$

denn  $D_f(\sigma)$  konvergiert absolut und für  $n \neq k$  gilt

$$\left| \frac{\sin(T \ln(k/n))}{\ln(k/n)} \right| \leq \frac{1}{\ln(1 + 1/k)}.$$

Ist nämlich  $n < k$ , so gilt  $\frac{k}{n} > 1$  bzw.  $\frac{k-1}{n} \geq 1$ , also  $\frac{k}{n} \geq 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{k}$ . Daher ist  $\ln(k/n) \geq \ln(1 + 1/k)$  und somit

$$\left| \frac{\sin(T \ln(k/n))}{\ln(k/n)} \right| \leq \left| \frac{1}{\ln(k/n)} \right| \leq \frac{1}{\ln(1 + 1/k)}.$$

Für  $n > k$  lassen sich wegen  $|\ln(k/n)| = |-\ln(n/k)| = \ln(n/k)$  und  $\frac{n}{k} > 1$  dieselben Abschätzungen wie oben mit vertauschten Rollen von  $k$  und  $n$  vornehmen.  $\square$

Nun kommen wir zum Produkt von DIRICHLET-Reihen.

**(2.4) Lemma.**

Seien  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  zahlentheoretische Funktionen mit den zugehörigen DIRICHLET-Reihen  $D_f(s)$  bzw.  $D_g(s)$  und absoluten Konvergenzabszissen  $\sigma_a(f)$  bzw.  $\sigma_a(g) \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft  $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$

$$D_f(s) \cdot D_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (f * g)(n) \cdot n^{-s} = D_{f*g}(s).$$

Ist  $f(1) \neq 0$ , so gilt mit dem DIRICHLET-Inversen  $f^{-1}$

$$D_f(s) \cdot D_{f^{-1}}(s) = 1 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(f^{-1})\}.$$

**Beweis.**

Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\}$  darf man wegen der absoluten Konvergenz



## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

---

beliebig umsortieren und erhält daher mit dem CAUCHY-Produkt

$$\begin{aligned} D_f(s) \cdot D_g(s) &= \left( \sum_{m=1}^{\infty} f(m) \cdot m^{-s} \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \cdot n^{-s} \right) \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{m-1} f(n)n^{-s} \cdot g(m-n)(m-n)^{-s} \right) \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{m-1} f(n)g(m-n) \cdot (n(m-n))^{-s} \right). \end{aligned}$$

Nun setzt man  $k := n(m-n)$ . Wegen  $1 \leq n \leq m-1$  gilt  $k = n(m-n) \geq m-1$ . Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  gibt es daher nur endlich viele  $m \in \mathbb{N}$ , genauer gilt  $2 \leq m \leq k+1$ , sodass sich  $k$  als Produkt der Form  $k = (m-n)n$  schreiben lässt. Insbesondere gibt es auch nur endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , die diese Darstellung erfüllen. Somit liegt eine Umordnung vor, und mit  $m-n = \frac{k}{n}$  gilt weiter

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{m-1} f(n)g(m-n) \cdot (n(m-n))^{-s} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n|k} f(n) \cdot g\left(\frac{k}{n}\right) \cdot k^{-s} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f * g)(k) \cdot k^{-s} \\ &= D_{f*g}(s). \end{aligned}$$

Ist  $f(1) \neq 0$ , so ist  $f$  nach (1.9) invertierbar mit  $f * f^{-1} = e$  und man erhält die zweite Aussage

$$D_f(s) \cdot D_{f^{-1}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (f * f^{-1})(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) \cdot n^{-s} = 1$$

für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(f^{-1})\}$  □

Als praktische Anwendung von (2.4) erhalten wir das

**(2.5) Korollar.**

a) Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  gilt  $\zeta(s) \neq 0$  und

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s}.$$

b) Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 2$  gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \cdot n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

c) Für  $\alpha \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \max\{1, \operatorname{Re}(\alpha) + 1\}$  gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\alpha}(n) \cdot n^{-s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s - \alpha).$$

**Beweis.**

Wir haben bereits gesehen, dass die Konvergenzabszisse  $\sigma_a(i)$  der RIEMANNschen Zetafunktion 1 ist. Dies wird im Folgenden stets zur Anwendung von (2.4) benötigt.

a) Es ist  $|\mu(n)| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n) \cdot n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re}(s)}$$

für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , d.h. für  $D_{\mu}$  gilt  $\sigma_a(\mu) \leq 1$ . Mit (2.4) erhält man für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} i(n) \cdot n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (i * \mu)(n) \cdot n^{-s} \\ &\stackrel{(1.6)a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e(n) \cdot n^{-s} = 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\zeta(s) \neq 0$  für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  und somit die Behauptung.

b) Es ist  $|\varphi(n)| \leq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n) \cdot n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\operatorname{Re}(s)-1)}$$

## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 2$ , d.h. für  $D_\varphi$  gilt  $\sigma_a(\varphi) \leq 2$ . Auch hier wendet man (2.4) an und erhält für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 2$

$$\begin{aligned} \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \cdot n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} i(n) \cdot n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (i * \varphi)(n) \cdot n^{-s} \\ &\stackrel{(1.6)b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} i_1(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s+1} = \zeta(s-1). \end{aligned}$$

Mit  $\zeta(s) \neq 0$  nach Teil a) erhält man daraus die gewünschte Gleichheit.

c) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |i_\alpha(n) \cdot n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s+\alpha}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\operatorname{Re}(s)-\operatorname{Re}(\alpha))}$$

konvergiert für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\alpha) + 1$ , d.h. für  $D_{i_\alpha}$  gilt  $\sigma_a(i_\alpha) \leq \operatorname{Re}(\alpha) + 1$ . Mit (2.4) gilt dann für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \max\{1, \operatorname{Re}(\alpha) + 1\}$

$$\begin{aligned} \zeta(s) \cdot \zeta(s-\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} i(n) \cdot n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} i_\alpha(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (i * i_\alpha)(n) \cdot n^{-s} \\ &\stackrel{(1.4)c)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\alpha(n) \cdot n^{-s}. \end{aligned}$$

□

Als Korollar halten wir weitere Identitäten fest.

### (2.6) Korollar.

Es sei  $\omega(n)$  die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  gilt

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \cdot n^{-s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot n^{-s} = \zeta(s)^2,$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} \cdot n^{-s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.$

### Beweis.

a) Zunächst gilt nach Definition der DIRICHLET-Faltung und mit Vorgriff auf ein späteres Resultat (I(2.12) in [1])

$$(i * \lambda)(n) = (\lambda * i)(n) = \sum_{d|n} \lambda(d) \cdot i\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \lambda(d) \stackrel{I(2.12)}{=} (T\lambda)(n), \quad (*)$$

## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

---

mit der summatorischen Funktion von  $\lambda$  aus [1] I(2.17) a)

$$(T\lambda)(n) = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiter hat man  $|\lambda(n)| = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(n) \cdot n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re}(s)}$$

für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , d.h. für  $D_\lambda$  gilt  $\sigma_a(\lambda) \leq 1$ . Wegen  $\sigma_a(i) = 1$  ist somit (2.4) anwendbar und man kann für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned} \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)n^{-s} \stackrel{(2.4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (i * \lambda)(n)n^{-s} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (T\lambda)(n)n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} (T\lambda)(m^2)(m^2)^{-s} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2s} = \zeta(2s) \end{aligned}$$

Da nach (2.5) a)  $\zeta(s) \neq 0$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  erfüllt ist, folgt daraus die Behauptung.

*Alternativer Beweis:*

Es ist  $\lambda \not\equiv 0$  und wie oben gezeigt gilt  $\sigma_a(\lambda) \leq 1$ . Die LIOUVILLESche Funktion ist zudem nach [1] I(2.17) a) (streng) multiplikativ. Somit lässt sich das EULER-Produkt der DIRICHLET-Reihe  $D_\lambda(s)$  bilden, welches für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  absolut konvergiert:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \cdot n^{-s} &= D_\lambda(s) \stackrel{[1] \text{ I(4.15)}}{=} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \lambda(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \lambda(1) \cdot 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \cdot p^{-ls} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot p^{-ls} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} p^{-2ls} - \sum_{l=0}^{\infty} p^{-(2l+1)s} \right) \\
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} (p^{-2s})^l - p^{-s} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (p^{-2s})^l \right) \\
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \frac{1}{1 - p^{-2s}} - \frac{p^{-s}}{1 - p^{-2s}} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-2s}} \\
 &= \frac{\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-2s})^{-1}}{\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}} \stackrel{\text{I(4.16) a)}}{=} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},
 \end{aligned}$$

wobei auch hier  $\zeta(s) \neq 0$  wegen  $\operatorname{Re}(s) > 1$  erfüllt ist.

b) Mit  $\sigma_a(i) = 1$  gilt für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \stackrel{(2.4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (i * i)(n) n^{-s} \stackrel{(1.4) a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s}.$$

c) Wir definieren zunächst die zahlentheoretische Funktion

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(n) = 2^{\omega(n)}.$$

Mit Aufgabe 4 d) aus Kapitel I §2 in [1] gilt  $2^{\omega(n)} \leq \tau(n)$ . Mit den Umformungen aus Teil b) erhält man daher

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \left| 2^{\omega(n)} \cdot n^{-s} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} \cdot |n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot |n^{-s}| \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (i * i)(n) \cdot |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}|,
 \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck nach (2.4) für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  absolut konvergiert, d.h. für  $D_f$  gilt  $\sigma_a(f) \leq 1$ . Zusammen mit  $\sigma_a(i) = 1$  ist (2.4) anwendbar und man kann mit der in Teil a) verwendeten Darstellung

$$\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = \sum_{n=1}^{\infty} (T\lambda)(n) n^{-s}$$

für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  folgende Umformungen vornehmen:

$$\zeta(2s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (T\lambda)(n) n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} n^{-s} \stackrel{(2.4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (T\lambda * f)(n) n^{-s}.$$

## §2 Produkte von Dirichlet-Reihen

Zeigt man nun noch, dass  $T\lambda * f = \tau$  gilt, so folgt mit der Identität aus Teil b)

$$\zeta(2s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (T\lambda * f)(n) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} \stackrel{\text{b)}}{=} \zeta(s)^2.$$

Mit  $\zeta(2s) \neq 0$  wegen  $\zeta(s) \neq 0$  für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  erhält man schließlich die Behauptung.

Zur Gleichheit  $T\lambda * f = \tau$ :

Da die LIOUVILLESche Funktion nach [1] I(2.17) a) multiplikativ ist, ist mit [1] I(2.13) a) auch ihre summatorische Funktion  $T\lambda$  multiplikativ. Für teilerfremde  $m, n \in \mathbb{N}$  mit den Primfaktorzerlegungen  $m = p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}$  bzw.  $n = q_1^{w_1} \cdot \dots \cdot q_l^{w_l}$ , also  $p_i \neq q_j$ , gilt weiter  $f(mn) = 2^{\omega(mn)} = 2^{k+l} = 2^k \cdot 2^l = 2^{\omega(m)} \cdot 2^{\omega(n)} = f(m)f(n)$ , d.h.  $f$  ist multiplikativ. Mit [1] I(2.10) ist dann auch  $T\lambda * f$  multiplikativ.  $\tau = i * i$  ist als Dirichlet-Faltung zweier multiplikativer Funktionen nach I(2.11) a) und I(2.10) in [1] ebenfalls multiplikativ. Somit genügt es, die Gleichheit  $T\lambda * f = \tau$  nur für Primzahlpotenzen zu zeigen, denn eine multiplikative Funktion  $g$  ist durch die Werte  $g(p^v)$  mit  $p \in \mathbb{P}$  und  $v \in \mathbb{N}$  bereits eindeutig bestimmt. Ist nämlich  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  beliebig mit der Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_k^{v_k}$ , also  $\operatorname{ggT}(p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{v_{k-1}}, p_k^{v_k}) = 1$ , so folgt daraus induktiv, dass  $g(n) = g(p_1^{v_1}) \cdot \dots \cdot g(p_k^{v_k})$  gilt.

Sei daher  $p \in \mathbb{P}$  und  $v \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (T\lambda * f)(p^v) &= \sum_{d|p^v} T\lambda(d) \cdot 2^{\omega(p^v/d)} = \sum_{k=0}^v T\lambda(p^k) \cdot 2^{\omega(p^{v-k})} \\ &= \sum_{k=0}^{v-1} T\lambda(p^k) \cdot 2^{\omega(p^{v-k})} + T\lambda(p^v) \cdot 2^{\omega(1)} \\ &= \sum_{k=0}^{v-1} T\lambda(p^k) \cdot 2 + T\lambda(p^v) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor} T\lambda(p^k) \cdot 2 + T\lambda(p^v) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{v-1}{2} \rfloor} 2 + T\lambda(p^v) = \left( \left\lfloor \frac{v-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \cdot 2 + T\lambda(p^v) \\ &= \begin{cases} \left( \frac{v-1}{2} + 1 \right) \cdot 2 + 0, & v \text{ ungerade,} \\ \left( \frac{v-1}{2} + 1 \right) \cdot 2 + 1, & v \text{ gerade,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} v - 1 + 2, & v \text{ ungerade,} \\ v - 2 + 2 + 1, & v \text{ gerade,} \end{cases} \\ &= v + 1 = \#\{p^k; 0 \leq k \leq v\} = \#\{d \in \mathbb{N}; d | p^v\} = \tau(p^v). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun  $(T\lambda * f)(n) = \tau(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Alternativer Beweis:*

Wie oben gezeigt gilt  $\sigma_a(f) \leq 1$  und  $f \not\equiv 0$  ist multiplikativ. Damit kann man I(4.15) aus [1] anwenden und erhält für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} \cdot n^{-s} &= D_f(s) \stackrel{\text{I(4.15)}}{=} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} 2^{\omega(p^l)} \cdot p^{-ls} \right) \\
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 2^{\omega(1)} \cdot 1 + \sum_{l=1}^{\infty} 2^{\omega(p^l)} \cdot p^{-ls} \right) \\
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} 2 \cdot p^{-ls} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 1 + \sum_{l=0}^{\infty} 2 \cdot p^{-ls} - 2 \right) \\
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( 2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l - 1 \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \frac{2}{1 - p^{-s}} - 1 \right) \\
 &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \frac{2 - (1 - p^{-s})}{1 - p^{-s}} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1 + p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1 - p^{-2s}}{(1 - p^{-s})^2} \\
 &= \frac{\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-2}}{\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-2s})^{-1}} \stackrel{\text{I(4.16)a)}}{=} \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)},
 \end{aligned}$$

wobei  $\zeta(2s) \neq 0$  wegen  $\operatorname{Re}(s) > 1$  erfüllt ist. □

## Literatur

- [1] Aloys Krieg. Analytische Zahlentheorie. RWTH Aachen, 2009.
- [2] Aloys Krieg. Funktionentheorie I. RWTH Aachen, 2010.