Produktdarstellungen von Dirichlet-Reihen

Ausarbeitung: Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 23.04.2012

Victoria Schumann

§1 Multiplikativität

Im Folgenden werden die Bezeichnungen aus dem Skript "Analytische Zahlentheorie" (siehe Literaturliste [1]) verwendet.

(1.1) Definition
Man nennt $0 \neq f \in \mathcal{A}$ *multiplikativ*, wenn

$$f(mn) = f(m) \cdot f(n)$$

für alle teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$.
Mit $\mathcal{M}$ bezeichnen wir die Menge der multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen. $0 \neq f \in \mathcal{A}$ heißt *streng multiplikativ*, wenn

$$f(mn) = f(m) \cdot f(n)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

(1.2) Bemerkung
Ist $f \in \mathcal{M}$ und $m = 1$, so folgt $f(n) = f(1) \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass aus $f \neq 0$ auch $f(1) = 1$ folgt. Insbesondere ist jedes (streng) multiplikative f somit stets eine Einheit in $\mathcal{A}$. $\diamond$

(1.3) Satz
$\mathcal{M}$ ist Untergruppe der Einheitengruppe von $\mathcal{A}$, d.h. aus $f, g \in \mathcal{M}$ folgt

$$f * g \in \mathcal{M} \quad \text{und} \quad f^{-1} \in \mathcal{M}. \qquad \diamond$$

Beweis
Es gilt $e \in \mathcal{M}$, denn für $mn = 1$ folgt $m = n = 1 \Rightarrow e(mn) = 1 = e(m)e(n)$. Für $mn > 1$ ist $e(mn) = 0 = e(m)e(n)$, da $m > 1$ oder $n > 1$. Also ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Seien $f, g \in \mathcal{M}$. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so kann man alle Teiler r von $m \cdot n$ eindeutig in der Form $r = d \cdot t$ mit $d|m$ und $t|n$ darstellen: Sei $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ und $n = q_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{\nu_l}$. Es gilt $p_i \neq q_j$ für alle $1 \leq i \leq r$ und für alle $1 \leq j \leq l$. Jeder Teiler r von mn kann wie folgt dargestellt werden: $r = d \cdot t$. Wähle dabei: $d = p_1^{\alpha'_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha'_r}$

mit $\alpha_i' \leq \alpha_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ und $t = q_1^{\nu_1'} \cdot \ldots \cdot q_l^{\nu_l'}$ mit $\nu_j' \leq \nu_j$ für alle $1 \leq j \leq l$. Dann folgt $d|m$ und $t|n$ für alle d, t wie oben gewählt.

Mit $\mathrm{ggT}(d,t) = \mathrm{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{n}{t}) = \mathrm{ggT}(m,n) = 1$ folgt dann

$$\begin{aligned}
(f * g)(mn) &= \sum_{r|m\cdot n} f(r) g\left(\frac{mn}{r}\right) = \sum_{d|m}\sum_{t|n} f(d\cdot t) g\left(\frac{m}{d}\cdot\frac{n}{t}\right) \\
&= \sum_{d|m}\sum_{t|n} f(d)f(t) g\left(\frac{m}{d}\right) g\left(\frac{n}{t}\right) = \sum_{d|m} f(d) g\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{t|n} f(t) g\left(\frac{n}{t}\right) \\
&= (f*g)(m)\cdot(f*g)(n),
\end{aligned}$$

also ist auch $(f * g)$ multiplikativ.

Seien wieder m, n teilerfremd. Die Multiplikativität von f^{-1} kann durch Induktion nach mn gezeigt werden, wobei der Fall $m = 1$ oder $n = 1$ wegen $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = 1$ klar ist. Sei also $m > 1, n > 1$. Dann folgt mit der Induktionsvoraussetzung ($f^{-1}(uv) = f^{-1}(u) \cdot f^{-1}(v)$ für alle teilerfremden $u, v \in \mathbb{N}$ mit $uv < mn$) und der Zerlegung und den Überlegungen von oben

$$\begin{aligned}
f^{-1}(mn) &= -\sum_{r|mn, r>1} f(r) f^{-1}\left(\frac{mn}{r}\right) \\
&= -\sum_{d|m,d>1}\sum_{t|n,t>1} f(d\cdot t) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\cdot\frac{n}{t}\right) - \sum_{d|m,d>1} f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\cdot n\right) \\
&\quad - \sum_{t|n,t>1} f(t) f^{-1}\left(m\cdot\frac{n}{t}\right) \\
&\overset{IV}{=} -\sum_{d|m,d>1}\sum_{t|n,t>1} f(d)f(t) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) f^{-1}\left(\frac{n}{t}\right) - \sum_{d|m,d>1} f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) f^{-1}(n) \\
&\quad - \sum_{t|n,t>1} f(t) f^{-1}(m) f^{-1}\left(\frac{n}{t}\right) \\
&= -\sum_{d|m,d>1} f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{t|n,t>1} f(t) f^{-1}\left(\frac{n}{t}\right) - \left[\sum_{d|m,d>1} f(d) f^{-1}\left(\frac{m}{d}\right)\right] f^{-1}(n) \\
&\quad - f^{-1}(m) \sum_{t|n,t>1} f(t) f^{-1}\left(\frac{n}{t}\right) \\
&= -f^{-1}(m)f^{-1}(n) + f^{-1}(m)f^{-1}(n) + f^{-1}(m)f^{-1}(n) \\
&= f^{-1}(m)f^{-1}(n)
\end{aligned}$$

Somit ist auch f^{-1} multiplikativ, also ist $\mathcal{M}$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von $\mathcal{A}$. □

(1.4) Beispiel

a) i_k ist für jedes $k \in \mathbb{C}$ streng multiplikativ, denn es gilt:

$$i_k(m \cdot n) = (m \cdot n)^k = e^{k \cdot \mathrm{Log}(m \cdot n)} \overset{m,n \in \mathbb{N}}{=} e^{k \cdot \ln(m \cdot n)} = e^{k \cdot (\ln m + \ln n)} = e^{k \cdot \ln m} \cdot e^{k \cdot \ln n}$$
$$= m^k \cdot n^k = i_k(m) \cdot i_k(n)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$, für alle $k \in \mathbb{C}$.

b) Die gewichtete Teilersumme σ_k ist multiplikativ, wie man mit Hilfe von a) und Satz 1.3 zeigen kann:

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k = \sum_{d|n} i_k(d) \cdot i\left(\frac{n}{d}\right) = (i_k * i)(n), \quad k \in \mathbb{C}.$$

c) Die MÖBIUSsche my-Funktion ist DIRICHLET-Inverses von $i \equiv 1$ (vgl. Skript, 2.6 a). Sie ist multiplikativ, da i multiplikativ ist und $\mathcal{M}$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von $\mathcal{A}$ bildet.

d) Für die EULERsche φ - Funktion gilt: $\varphi = \mu * i_1$. Da μ und i_1 multiplikativ sind, ist φ als Faltung von zwei multiplikativen Funktionen ebenfalls multiplikativ, da $\mathcal{M}$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von $\mathcal{A}$ bildet. Weiterhin gilt:

$$\varphi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1} = p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{für } p \in \mathbb{P}, \nu \in \mathbb{N}.$$

Daraus und aus der Multiplikativität von φ folgt die Formel

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis der Formeln:

$$\varphi(p^\nu) \overset{*}{=} p^\nu - p^{\nu-1} = p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{für } p \in \mathbb{P}, \nu \in \mathbb{N}$$

Die Gleichheit $*$ kann man sich einfach überlegen: $\varphi(p^\nu)$ entspricht der Anzahl aller zu p teilerfremden Zahlen zwischen 1 und p^ν. p^ν gibt die Gesamtanzahl aller Zahlen zwischen 1 und p^ν an, von der die Anzahl aller Zahlen n, die nicht teilerfremd zu p^ν sind subtrahiert wird. Für diese Zahlen gilt also:

$\mathrm{ggT}(n, p^\nu) \neq 1 \Leftrightarrow n = p \cdot m, 1 \leq m \leq p^{\nu-1}$. Also sind es gerade $p^{\nu-1}$ Stück. Betrachtet man nun $n = \prod_{p \in \mathbb{P}, p|n} p^{\nu_r}$, so folgt, da φ multiplikativ ist

$$\varphi(n) = \varphi\left(\prod_{p\in\mathbb{P},p|n} p^{\nu_r}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P},p|n} \varphi(p^{\nu_r}) = \left(\prod_{p\in\mathbb{P},p|n} p^{\nu_p}\right) \prod_{p\in\mathbb{P},p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$
$$= n \cdot \prod_{p\in\mathbb{P},p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

e) Gilt $f \in \mathcal{M}$, so sind auch $|f|$ und f^n, $n \in \mathbb{N}$ multiplikativ: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gilt:

$$|f(ab)| \overset{f\in\mathcal{M}}{=} |f(a)f(b)| = |f(a)| \cdot |f(b)|, \quad \text{sowie}$$
$$f^n(ab) = [f(ab)]^n \overset{f\in\mathcal{M}}{=} [f(a)f(b)]^n = [f(a)]^n \cdot [f(b)]^n = f^n(a) \cdot f^n(b).$$

f) Für die VON MANGOLDTsche Lambda-Funktion gilt, da μ invertierbar ist mit $\mu * i = e$ (Skript, 2.6a):

$$\Lambda * i \overset{Skript, 2.6d}{=} \ln \Leftrightarrow (\Lambda * i) * \mu = \ln * \mu \Leftrightarrow \Lambda = \ln * \mu, \text{ d.h.}$$

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right) = \underbrace{\ln n \sum_{d|n} \mu(d)}_{=0} - \sum_{d|n} \mu(d) \ln(d) = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln(d).$$

Bemerkung: Für $n = 1$ gilt $\ln n = \ln 1 = 0$. Für $n > 1$ gilt $\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot i\left(\frac{n}{d}\right) = (\mu * i)(n) = e(n) = 0$. ◇

§2 Dirichlet-Reihen

(2.1) Satz (Identitätssatz)
Gegeben seinen zahlentheoretische Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit zugehörigen DIRICHLET-Reihen $D_f(s), D_g(s)$, die für $Re(s) > c$ konvergieren.

a) Gibt es eine nicht-diskrete Teilmenge N in $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > c\}$ mit der Eigenschaft

$$D_f(s) = D_g(s) \quad \text{für alle } s \in N, \text{ so gilt}$$

$$f(n) = g(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ d.h. } f = g.$$

b) Gilt $D_f(s_k) = D_g(s_k)$ für eine Folge $(s_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ mit $\sigma_k = Re(s_k) \to \infty$ für $k \to \infty$, so folgt

$$f(n) = g(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ d.h. } f = g. \qquad \diamond$$

Beweis

a) Da DIRICHLET-Reihen holomorph sind, kann der Identitätssatz für holomorphe Funktionen (vgl. [2] Funktionentheorie I, S. 61, Korollar 3.10) angewendet werden, also gilt: $D_f(s) = D_g(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > c$. Die Behauptung folgt dann als Spezialfall von b).

b) Sei $h(n) = f(n) - g(n)$, also $D_h(s_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen $h \not\equiv 0$ an. Wähle $N \in \mathbb{N}$ minimal mit $h(N) \neq 0$. Dann gilt für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > c$

$$D_h(s) = \sum_{n=N}^{\infty} h(n) \cdot n^{-s} = h(N) \cdot N^{-s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n) \cdot n^{-s}$$

$$\Leftrightarrow h(N) = N^s \cdot D_h(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n) \cdot n^{-s}$$

Für $k \geq 1$ gilt $D_h(s_k) = 0$, also

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n) \cdot n^{-s_k}.$$

Seien $\sigma_b(h)$ und $\sigma_a(h)$ die Konvergenzabszissen der Konvergenz bzw. absoluten Konvergenz von $D_h(s)$. Seien $\sigma_b(f)$ bzw. $\sigma_a(f)$ und $\sigma_b(g)$ bzw. $\sigma_a(g)$ die Konvergenzabszissen der Konvergenz bzw. der absoluten Konvergenz von f und g. Es gilt $c \geq \sigma_b(f)$ und $c \geq \sigma_b(g)$. Daraus folgt:

$$c + 1 \geq \sigma_b(f) + 1 \geq \sigma_a(f) \quad \text{und} \quad c + 1 \geq \sigma_b(g) + 1 \geq \sigma_a(g), \text{ also}$$
$$c + 1 \geq \max\{\sigma_b(f), \sigma_b(g)\} \geq \max\{\sigma_a(f), \sigma_a(g)\} \geq \sigma_a(h).$$

Wähle $\beta > c+1$ damit $D_h(\beta)$ absolut konvergiert. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Re}(s_k) = \sigma_k > \beta$:

$$\begin{aligned}
|h(N)| &= |N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n) \cdot n^{-s_k}| \\
&\leq |N^{s_k}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)||n^{-s_k}| = N^{\sigma_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| n^{-\sigma_k} \\
&\overset{*}{\leq} N^{\sigma_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| \cdot (N+1)^{\beta-\sigma_k} \cdot n^{-\beta} \\
&= (N+1)^{\beta} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| \cdot n^{-\beta} \cdot \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} \\
&= C \cdot \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k}
\end{aligned}$$

mit $C = (N+1)^{\beta} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| \cdot n^{-\beta}$.

Zu *: Für $n \geq N+1$ gilt: $n^{\beta-\sigma_k} \leq (N+1)^{\beta-\sigma_k} \Leftrightarrow n^{-\sigma_k} \leq (N+1)^{\beta-\sigma_k} \cdot n^{-\beta}$. Da D_h absolut konvergiert, ist $C < \infty$. Für $\sigma_k \to \infty$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} = 0, \text{ also } h(N) = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $h(N) \neq 0$. □

(2.2) Korollar

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion mit zugehöriger Dirichlet-Reihe $D_f(s)$ und Konvergenzabszisse $\sigma_b < \infty$. Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq 0$ oder gibt es ein $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s_0) > \sigma_b$ und $D_f(s_0) \neq 0$, so existiert ein $c \geq \sigma_b$ mit der Eigenschaft

$$D_f(s) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > c.$$ ◇

Beweis

Angenommen, es gibt kein solches c, dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $s_k \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s_k) = \sigma_k \geq k$ und $D_f(s_k) = 0$. Dann folgt $D_f \equiv 0$ und $f \equiv 0$ aus Satz 2.1. □

(2.3) Satz

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$, eine zahlentheoretische Funktion mit Konvergenzabszisse $\sigma_a < \infty$. Die zahlentheoretische Funktion f ist genau dann multiplikativ, wenn $D_f(s)$ die absolut konvergente Produktdarstellung

$$D_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_a$$

besitzt. ◇

Ein derartiges Produkt nennt man EULER-Produkt der DIRICHLET-Reihe.

Beweis
"⇒": Sei f multiplikativ, also auch $f(1) = 1$ nach Bemerkung 1.2. Ein unendliches Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gemäß Funktionentheorie I genau dann absolut, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - 1|$ konvergiert (vgl. [2] Funktionentheorie I, S. 159, 2.6). Es gilt

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} - 1 \right| \leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{l=1}^{\infty} |f(p^l)| p^{-l\sigma} \overset{*}{\leq} \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)| n^{-\sigma} < \infty, \quad \sigma > \sigma_a,$$

wobei die Abschätzung * gemacht werden darf, weil D_f für $\sigma > \sigma_a$ absolut konvergiert. Also folgt die absolute Konvergenz der Produktdarstellung. Sei nun

$$P_N := \prod_{p \leq N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right), N \in \mathbb{N}.$$

Als endliches Produkt absolut konvergenter Reihen darf P_N nach dem Satz von FUBINI beliebig umgeordnet werden, mit $\{p_1, ..., p_r\} = \{p \in \mathbb{P}; p \leq N\}$ folgt dann

$$\begin{aligned} P_N &= \sum_{l_1,...,l_r \geq 0} f(p_1^{l_1}) \cdot p_1^{-l_1 s} \cdot ... \cdot f(p_r^{l_r}) \cdot p_r^{-l_r s} \\ &= \sum_{l_1,...,l_r \geq 0} f(p_1^{l_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{l_r}) \cdot p_1^{-l_1 s} \cdot ... \cdot p_r^{-l_r s} \\ &= \sum_{l_1,...,l_r \geq 0} f(p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r}) \cdot (p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r})^{-s} \\ &= \sum_{n\in A} f(n) \cdot n^{-s}. \end{aligned}$$

Dabei besteht A gerade aus denjenigen $n \in \mathbb{N}$, die nur Primteiler $\leq N$ besitzen. Diejenigen n, die mindestens einen Primteiler $> N$ besitzen, bilden die Menge $B := \mathbb{N} \setminus A \subset \{N+1, N+2, ...\}$ und es gilt:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s} - P_N \right| = \left| \sum_{n\in B} f(n) \cdot n^{-s} \right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \cdot n^{-\sigma} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $N \to \infty$ und es folgt

$$D_f(s) = \lim_{N\to\infty} P_N = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right).$$

"$\Leftarrow$": Für $N \in \mathbb{N}$ und $\{p_1, ..., p_r\} = \{p \in \mathbb{P}; p \leq N\}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot n^{-s} - \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \\
= &\sum_{p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r} \leq N} [f(p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r}) - f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r})] \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} \\
&- \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r} > N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s},
\end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ konvergiert die linke Seite der Gleichung gegen 0 und die zweite Reihe der rechten Seite ebenfalls, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) p^{-ls} \right) = &\sum_{p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r} \leq N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} \\
&+ \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r} > N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s},
\end{aligned}$$

wobei

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r} \leq N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) p^{-ls} \right).$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r} > N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} = 0.$$

Da sowohl D_f als auch die Produktdarstellung absolut konvergent sind, darf nach dem Satz von FUBINI umsortiert werden. Es folgt also für den Rest

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\nu_1, ..., \nu_r \in \mathbb{N}_0} [f(p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r}) - f(p_1^{\nu_1}) \cdot ... \cdot f(p_r^{\nu_r})] \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot ... \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} = 0, \ \sigma > \sigma_a.$$

Nach dem Identitätssatz 2.1 sind alle Koeffizienten dieser DIRICHLET-Reihe 0. Somit ist f multiplikativ. $\square$

(2.4) Korollar
Es gilt für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$:

a) $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ für $\sigma > 1$,

b) $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})$ für $\sigma > 1$,

c) $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \cdot n^{-s} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}$ für $\sigma > 2$,

d) $\zeta(s) \cdot \zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\alpha(n) \cdot n^{-s} = \prod_p [(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})]^{-1}$
für $\alpha \in \mathbb{C}, \sigma > \max\{1, Re(\alpha) + 1\}$. ◇

Beweis

a) Für die RIEMANNsche Zeta-Funktion gilt: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = D_i(s)$, wobei i nach Beispiel 1.4 multiplikativ ist. Mit Satz 2.3 folgt dann

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \right) \underset{|p^{-s}|<1}{\overset{geom.Reihe}{=}} \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1},$$

für $\sigma > \sigma_b(i) = 1$.

b) Mit der DIRICHLET-Reihe von $\frac{1}{\zeta}$ (Skript 4.12a) und Satz 2.3 folgt

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \mu(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \overset{*}{=} \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}), \quad \text{für } \sigma > \sigma_b(\mu) = 1.$$

* Hier gilt für $l = 0$: $\mu(1) = 1$ und für $l = 1$: $\mu(p) \cdot p^{-s} = -p^{-s}$. Für $l > 1$ ist $\mu(p^l) = 0$ nach der Definition von μ (Skript, 2.5b).

c) Da $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ für $\sigma > 2$ gleich der DIRICHLET-Reihe $D_\varphi(s)$ ist (Skript 4.12b), folgt mit Satz 2.3

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \cdot n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varphi(p^l) \cdot p^{-ls} \right)$$

Für $l = 0$ gilt $\varphi(p^l) = \varphi(1) = 1$ und für $l > 0$ gilt $\varphi(p^l) = p^l - p^{l-1} = p^l(1 - p^{-1})$. Damit folgt

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} p^l p^{-ls} (1 - p^{-1}) \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + p^{1-s} \sum_{l=0}^{\infty} p^{l(1-s)} (1 - p^{-1}) \right)$$

$$\overset{geom.Reihe}{=} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + p^{1-s} \frac{1}{1 - p^{1-s}} (1 - p^{-1}) \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1 - p^{1-s} + p^{1-s}(1 - p^{-1})}{1 - p^{1-s}} \right)$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}} \quad \text{für } \sigma > 2.$$

d) Mit der DIRICHLET-Reihe von $\zeta(s)\cdot\zeta(s-\alpha)$ (Skript, 4.12c) und Satz 2.3 folgt für $\alpha\in\mathbb{C}$

$$\zeta(s)\cdot\zeta(s-\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_\alpha(n)\cdot n^{-s}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_\alpha(p^l)\cdot p^{-ls}\right)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}p^{\alpha k}\cdot p^{-ls}\right)$$
$$=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1-p^{\alpha(l+1)}}{1-p^{\alpha}}\cdot p^{-ls}\right)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{\alpha}}\sum_{l=0}^{\infty}(1-p^{\alpha(l+1)})\cdot p^{-ls}$$
$$=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{\alpha}}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}-p^{\alpha}\sum_{l=0}^{\infty}p^{(\alpha-s)l}\right)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{\alpha}}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}-p^{\alpha}\frac{1}{1-p^{\alpha-s}}\right)$$
$$=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{\alpha}}\left(\frac{1-p^{\alpha-s}-p^{\alpha}(1-p^{-s})}{(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})}\right)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})},$$

wobei die Reihen nur konvergent sind, wenn $\sigma>\max\{1,\operatorname{Re}(\alpha)+1\}$. □

(2.5) Korollar
Für $s\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s)>1$ gilt:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n^2)n^{-s}=\frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)^2n^{-s}=\frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\kappa(n)n^{-s}=\frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}$ mit $\kappa(p^\nu)=\nu$ für $\nu>1$ und κ multiplikativ,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{\omega(n)}\kappa(n)n^{-s}=\frac{\zeta(s)^3}{\zeta(3s)}$, wobei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n angibt und mit κ aus c. ◇

Beweis
a) Seien $m,n\in\mathbb{N}$ teilerfremd, dann sind auch m^2 und n^2 teilerfremd und es gilt:

$$\tau((mn)^2)=\tau(m^2n^2)\overset{\tau\text{ multiplikativ}}{=}\tau(m^2)\tau(n^2).$$

Da $\tau(n^2)$ damit multiplikativ ist und p^{2l} gerade $2l+1$ Teiler hat folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n^2)n^{-s}\overset{2.3}{=}\prod_{p}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\tau(p^{2l})\cdot p^{-ls}\right)=\prod_{p}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot p^{-ls}\right)\overset{*}{=}\prod_{p}\frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2}$$
$$=\prod_{p}\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3}=\left(\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}\right)^3\cdot\prod_{p}(1-p^{-2s})\overset{2.4}{=}\frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}.$$

* Zu zeigen: $\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)x^l = \frac{1+x}{(1-x)^2}$ für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$. Setze anschließend $x = p^{-s}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)x^l &= \sum_{l=0}^{\infty}(2\cdot(l+1)-1)x^l = 2\cdot\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)x^l - \sum_{l=0}^{\infty}x^l \\
&= 2\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}x^l - \sum_{l=0}^{\infty}x^l \overset{|x|<1}{=} 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}x^l - \sum_{l=0}^{\infty}x^l \\
&= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}x^{l+k} - \sum_{l=0}^{\infty}x^l = 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^k\sum_{l=0}^{\infty}x^l\right) - \sum_{l=0}^{\infty}x^l \\
&= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(1-x)} - \sum_{l=0}^{\infty}x^l = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x+1}{1-x^2},
\end{aligned}$$

da $|x| < 1$ und somit die Reihen absolut konvergent sind und die geometrische Reihe angewendet werden kann.

b) Aus $\tau(n) \in \mathcal{M}$ folgt $\tau(n)^2 \in \mathcal{M}$. p^l hat gerade $l+1$ Teiler, daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)^2\cdot n^{-s} &\overset{2.3}{=} \prod_p\left(\sum_{l=0}^{\infty}\tau(p^l)^2\cdot p^{-ls}\right) = \prod_p\left(\sum_{l=0}^{\infty}(l+l)^2\cdot p^{-ls}\right) \\
&= \prod_p\left(\sum_{l=0}^{\infty}(l^2+2l+1)\cdot p^{-ls}\right) = \prod_p\left(\sum_{l=0}^{\infty}l^2\cdot p^{-ls} + \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot p^{-ls}\right) \\
&\overset{\text{* und a)}}{=} \prod_p\left(\frac{p^{-s}(1+p^{-s})}{(1-p^{-s})^3} + \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3}\right) = \prod_p\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^4} \\
&= \left(\prod(1-p^{-s})^{-1}\right)^4\cdot\prod(1-p^{-2s}) \overset{2.4}{=} \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$

Für * gilt mit $x = p^{-s}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{l=0}^{n}l^2\cdot x^l = \sum_{l=0}^{n}x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}x^l\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{n}x^l\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Da $|x| < 1$, ist die unendliche Reihe konvergent und es folgt:

$$\sum_{l=0}^{\infty}l^2\cdot x^l = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{\infty}x^l\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right) = x\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

c) Nach 2.4 gilt:

$$\frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)} = \prod_p\frac{1-p^{-6s}}{(1-p^{-s})(1-p^{-2s})(1-p^{-3s})}.$$

Mit $x = p^{-s}$ folgt:

$$\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{(1-x^3)(1+x)(1-x+x^2)}{(1-x)(1-x)(1+x)(1-x^3)} = \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2}.$$

Da κ multiplikativ ist, folgt $\kappa(1) = 1$ mit Bemerkung 1.2. Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa(s) n^{-s} \overset{2.3}{=} \prod_p \left(\sum_{l=0}^{\infty} \kappa(p^l) \cdot p^{-ls} \right)$$
$$= \prod_p \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \kappa(p^l) \cdot p^{-ls} \right) = \prod_p \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot p^{-ls} \right)$$

Mit analogen Überlegungen zu a) und $x = p^{-ls}$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa(s) n^{-s} = \prod_p \left(1 + \left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \right) \right) = \prod_p \left(\frac{(1-x)^2 + x}{(1-x)^2} \right)$$
$$= \prod_p \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2}.$$

Somit ist die Gleichheit bewiesen.

d) Die Funktion $3^{\omega(n)}$ ist multiplikativ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. $3^{\omega(mn)} \overset{\mathrm{ggT}(m,n)=1}{=} 3^{\omega(m)+\omega(n)} = 3^{\omega(m)} 3^{\omega(n)}$. Da κ ebenfalls multiplikativ ist folgt nach Satz 2.3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\omega(n)} \kappa(n) n^{-s} = \prod_p \left(\sum_{l=0}^{\infty} 3^{\omega(p^l)} \kappa(p^l) p^{-ls} \right) = \prod_p \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} 3 l p^{-ls} \right)$$
$$\overset{c}{=} \prod_p \left(1 + 3 \cdot \frac{p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} \right) = \prod_p \frac{1 + p^{-s} + p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2}$$
$$= \prod_p \frac{1-p^{-3s}}{(1-p^{-s})^3} = \frac{\prod_p (1-p^{-3s})}{\prod_p (1-p^{-s})^3} \overset{2.4}{=} \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(3s)}.$$

□

(2.6) Satz
Sei $f \in \mathcal{A}$, $f \not\equiv 0$, eine zahlentheoretische Funktion mit Konvergenzabszisse $\sigma_a < \infty$. f ist genau dann streng multiplikativ, wenn $D_f(s)$ die absolut konvergente Produktdarstellung

$$D_f(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - f(p) \cdot p^{-s})^{-1} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_a$$

besitzt. ◇

Beweis
"⇒": Sei f streng multiplikativ. Damit ist f insbesondere auch multiplikativ und es gilt nach Satz 2.3:

$$\begin{aligned} D_f(s) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \overset{f \text{ streng multiplikativ}}{=} \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p)^l \cdot p^{-ls} \right) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(f(p) \cdot p^{-s} \right)^l \right). \end{aligned}$$

Da f die Konvergenzabszisse $\sigma_a < \infty$ besitzt, folgt für $\sigma > \sigma_a$ und jede Primzahl p_j:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}| \geq \sum_{l_j=0}^{\infty} |f(p_j^{l_j})p_j^{-l_js}| = \sum_{l_j=0}^{\infty} |f(p_j)p_j^{-s}|^{l_j}.$$

Daher folgt, dass auch $\sum_{l_j=0}^{\infty}(f(p_j)p_j^{-s})^{l_j}$ für $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_a$ absolut konvergiert. Wegen der geometrischen Reihe muss also

$$|f(p_j)p_j^{-s}| < 1$$

gelten. Somit kann die geometrische Reihe angewendet werden und es folgt:

$$D_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1 - f(p) \cdot p^{-s})^{-1}.$$

"⇐": Da $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ absolut konvergent ist, muss $f(n)n^{-s}$ eine Nullfolge sein. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f(n)n^{-s}| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Das heißt, es gibt höchstens endlich viele $p \in \mathbb{P}$ mit $|f(p)p^{-s}| \geq 1$. Für ein beliebiges s_0 mit $\mathrm{Re}(s_0) > \sigma_a$ gilt daher:

$$c := \sup_{p\in\mathbb{P}}\{|f(p)p^{-s_0}|\} < \infty.$$

Wähle $s = s_0 + \log_2(c+1)$, wobei $c + 1 \geq 1$ und somit $\log_2(c+1) \geq 0$. Dann folgt für alle $p \in \mathbb{P}$

$$|f(p)p^{-s}| = |f(p)p^{-s_0}| \cdot p^{-\log_2(c+1)} \leq c \cdot 2^{-\log_2(c+1)} \leq \frac{c}{c+1} < 1.$$

Also kann $\mathrm{Re}(s)$ so groß gewählt werden, dass $|f(p)p^{-s}| < 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Somit kann die geometrische Reihe angewendet werden:

$$D_f(s) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - f(p_j)p_j^{-s})^{-1} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{l_j=0}^{\infty} \left[f(p_j)p^{-s} \right]^{l_j} \right).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ und $\{p_1, ..., p_r\} = \{p \in \mathbb{P}; p \leq N\}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)n^{-s} - \prod_{j=1}^{r} \left(\sum_{l_j=0}^{\infty} [f(p_j)p^{-s}]^{l_j} \right)$$
$$= \sum_{p_1^{l_1}\cdot ... \cdot p_r^{l_r} \leq N} [f(p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r}) - f(p_1)^{l_1} \cdot ... \cdot f(p_r)^{l_r})] \cdot (p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r})^{-s}$$
$$- \sum_{p_1^{l_1}\cdot ... \cdot p_r^{l_r} > N} f(p_1)^{l_1} \cdot ... \cdot f(p_r)^{l_r} \cdot (p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r})^{-s},$$

Für $N \to \infty$ konvergiert die linke Seite der Gleichung gegen 0 und die zweite Reihe der rechten Seite ebenfalls (vgl. Beweis zu Satz 2.3). Da sowohl D_f als auch die Produktdarstellung absolut konvergent sind, darf nach dem Satz von FUBINI wieder umsortiert werden. Es folgt also für den Rest

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l_1,...,l_r \in \mathbb{N}_0} [f(p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r}) - f(p_1)^{l_1} \cdot ... \cdot f(p_r)^{l_r}] \cdot (p_1^{l_1} \cdot ... \cdot p_r^{l_r})^{-s} = 0$$

für alle $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_a$. Nach dem Identitätssatz 2.1 sind alle Koeffizienten dieser DIRICHLET-Reihe 0. Somit ist f streng multiplikativ. □

(2.7) Satz

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion mit $f(1) \neq 0$ und Konvergenzabszisse $\sigma_a < \infty$. Gilt $D_f(s) \neq 0$ für $\sigma > c \geq \sigma_a$, so folgt

$$D_f(s) = e^{D_g(s)}, \quad D_g(s) = \log f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\ln n} \cdot n^{-s}$$

für $\sigma \geq \max\{c, \sigma_a(f^{-1})\}$. Dabei ist $f'(n) = f(n) \cdot \ln n$ die formale Ableitung, f^{-1} das DIRICHLET-Inverse von f und log der Hauptwert des Logarithmus. ◇

Beweis

Die Menge $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > c\}$ ist ein konvexes, also einfach zusammenhängendes Gebiet, in dem $D_f(s)$ nullstellenfrei ist. Ein solches c existiert nach Korollar 2.2. Nach Funktionentheorie I (vgl. [2] S. 91, Satz 4.6) existiert auf diesem Gebiet dann ein holomorpher Logarithmus von D_f, also eine holomorphe Funktion $G(s)$ mit $D_f(s) = e^{G(s)}$ für $\sigma > c$. Dann gilt

$$D_f' = e^G \cdot G' = D_f \cdot G'.$$

Mit $D_f \cdot D_g = D_{f*g}$, $\frac{1}{D_f} = D_{f^{-1}}$ (Skript, 4.11) und $D'_f = -D_{f'}$ (Skript, 4.4c) folgt

$$G' = D'_f \cdot \frac{1}{D_f} = -D_{f'} \cdot D_{f^{-1}} = -D_{f'*f^{-1}} = -\sum_{n=2}^{\infty} (f' * f^{-1})(n) \cdot n^{-s}.$$

Wähle $g(n) = \frac{(f*f^{-1})(n)}{\ln n}$. Dann folgt $G'(s) = D'_g(s)$, also

$$G(s) = C + D_g(s) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\ln n} \cdot n^{-s},$$

dabei muss $\sigma > \max\{c, \sigma_a(f^{-1})\}$ sein, damit die Reihe konvergiert, da $D_{f'}$ für alle $\sigma > c$ und $D_{f^{-1}}$ für alle $\sigma > \sigma_a(f^{-1})$ konvergiert. Der Wert für C lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$e^C \overset{*}{=} e^{\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma)} = \lim_{\sigma\to\infty} e^{G(\sigma)} = \lim_{\sigma\to\infty} D_f(\sigma) \overset{\substack{\textit{Skript,}\\ 4.5}}{=} f(1).$$

Für * gilt: $\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma) = C$, da $n^{-\sigma} \to 0$ für $\sigma \to \infty$, $n \geq 2$. Somit folgt

$$C = \log f(1) + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Da $e^{2\pi i k} = 1$, kann $k = 0$ gewählt werden. □

(2.8) Korollar
Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \quad \text{mit} \quad G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \cdot n^{-s}.$$

◇

Beweis
Sei $f = i \equiv 1$, dann ist $f'(n) = \ln n$ und $f^{-1}(n) = \mu(n)$. In 2.7 eingesetzt ergibt sich

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \text{ mit } G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln * \mu)(n)}{\ln n} \cdot n^{-s} \overset{*}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \cdot n^{-s}, \quad \sigma > \sigma_b(i) = 1,$$

wobei * mit Beispiel 1.4 f folgt. □

Literatur

[1] Aloys Krieg: *Analytische Zahlentheorie*, RWTH Aachen, 2009.

[2] Aloys Krieg: *Funktionentheorie I*, RWTH Aachen, 2010.