Der Primzahlsatz, Teil 1

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 07.05.2012

Raffaela Biesenbach

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Herleitung des Primzahlsatzes. Dazu werden Definitionen und Sätze aus dem Skript zur Analytischen Zahlentheorie von Herrn Prof. Krieg verwendet (siehe Literaturverweis [1]). Die Variable p soll immer als $p \in \mathbb{P}$ verstanden werden.

(0.1) Definition (Primzahlsatz)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

wobei $\boldsymbol{\pi}$ die Primzahlzählfunktion $\boldsymbol{\pi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \pi(x) := \sharp\{p \in \mathbb{P}; p \leq x\}}$ ist. Dieser Satz wurde 1896 von Hadamard und De La Vallée Poussin bewiesen.

§1 Erste Abschätzungen zum Primzahlsatz

Für die ersten Abschätzungen behilft man sich folgender Funktionen:

— *Benötigte Funktionen* —

(1.1) Definition (Die Mangoldt-sche Lambda-Funktion)
Die Mangoldt-sche Lambda-Funktion

$$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{falls}\, n = p^k \quad k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Satz (2.5) aus [1])

(1.2) Definition (Die Chebyshev-sche psi-Funktion)

$$\Psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \Psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

(vgl. Definition (5.1) aus [1])

(1.3) Definition (Die Chebyshev-sche theta-Funktion)

$$\vartheta : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \ln p, \quad p \in \mathbb{P}$$

(vgl. ebd.)

(1.4) Definition (charakterische Funktion χ von $\mathbb{P}$)

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in \mathbb{P} \\ 0, & \text{falls } n \notin \mathbb{P} \end{cases}$$

(1.5) Satz (Abelsches Lemma)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und

$$F : [0, \infty) \to \ C, \quad F(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$$

Ist die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, $0 < a < b$, stetig und stückweise stetig differenzierbar, so gilt

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) \cdot g(n) = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(t) \cdot g'(t) dt$$

(vgl. Satz (4.1) aus [1])

— *Erste Abschätzungen* —

(1.6) Lemma
Für $x > 0$ gilt:

$$0 \leq \frac{\Psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x} \ln 2}$$

insbesondere hat man

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\Psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0$$

Beweis
$\Psi(x) := \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{m\geq 1,p \\ p^m\leq x}} \ln p$ für $m \in \mathbb{N}$. Diese Summe ist 0, falls $x < 2$ ist, also soll $x \geq 2$ sein. Da $p^m \leq x \Leftrightarrow p \leq x^{\frac{1}{m}}$ ist, muss also gelten:

$$\begin{aligned} & x^{\frac{1}{m}} && \geq 2 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x^{\frac{1}{m}}) && \geq \ln 2 \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{m}\ln x && \geq \ln 2 \\ \Leftrightarrow\ & m && \leq \frac{\ln x}{\ln 2} \end{aligned}$$

Also hat man

$$\Psi(x) = \sum_{m\leq\frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p\leq x^{\frac{1}{m}}} \ln p = \sum_{m\leq\frac{\ln x}{\ln 2}} \vartheta(x^{\frac{1}{m}})$$

Damit ist

$$0 \leq \Psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{1\leq m\leq\frac{\ln x}{\ln 2}} \vartheta(x^{\frac{1}{m}}) - \vartheta(x^{1/1}) = \sum_{2\leq m\leq\frac{\ln x}{\ln 2}} \vartheta(x^{\frac{1}{m}})$$

Aus der Definition von ϑ und der Tatsache, dass der ln streng monoton wachsend ist folgt

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p \leq \sum_{p\leq x} \ln x \leq x \cdot \ln x$$

und somit

$$0 \leq \Psi(x) - \vartheta(x) \leq \sum_{2\leq m\leq\frac{\ln x}{ln 2}} x^{\frac{1}{m}} \ln(x^{\frac{1}{m}}) \leq \sum_{2\leq m\leq\frac{\ln x}{\ln 2}} \sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} \leq \frac{\ln x}{\ln 2}\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}\ln x\cdot\ln x}{\ln 2} \leq \frac{\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2}{2\ln 2}$$

Dividiert durch x erhält man das gewünschte Ergebnis:

$$0 \leq \frac{\Psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\ln^2(x)}{2\sqrt{x}\,\ln 2}$$

Da jede Potenz schneller wächst als der Logarithmus ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x)}{2\sqrt{x}\,\ln 2} = 0$ und damit $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\Psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x}\right) = 0$. □

Wir werden nun eine weitere Umformung der ϑ- Funktion vornehmen und auch die Primzahlzählfunktion mithilfe dieser darstellen.

(1.7) Lemma
Für alle $x \geq 2$ gilt

a) $$\vartheta(x) = \pi(x) \cdot \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt$$

b) $$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \cdot \ln^2 t}\, dt$$

Beweis
a) Es gilt $\vartheta(x) = \sum\limits_{p \leq x} \ln p = \sum\limits_{1<n\leq x} \chi_{\mathbb{P}}(n) \cdot \ln(n)$. Wendet man Satz (1.5) auf

$f = \chi_{\mathbb{P}}(n)$, $F(x) = \pi(x)$, $g(x) = \ln x$, $a = 1$, $b = x$ an, dann gilt

$\pi(x) = \sum\limits_{p\leq x} 1 = \sum\limits_{1<n\leq x} \chi_{\mathbb{P}}(n) = F(x)$ und man erhält

Gleichung 1

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\vartheta(x)} &= \sum_{1<n\leq x} \chi_{\mathbb{P}}(n) \cdot \ln(n) = \pi(x) \cdot \ln(x) - \underbrace{\pi(1)\ln(1)}_{=0} - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt \\ &= \boldsymbol{\pi(x) \cdot \ln(x) - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt}\end{aligned}$$

b) Wendet man denselben Satz an auf

$$\tilde{f}(n) = \chi_{\mathbb{P}}(n) \cdot ln(n), \quad \tilde{F}(x) = \vartheta(x), \quad g(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = x, \qquad \text{folgt}$$

Gleichung 2

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi(x)} &= \sum_{\frac{3}{2}<n\leq x} \tilde{f}(n) \cdot \frac{1}{\ln n} = \frac{\vartheta(x)}{\ln(x)} - \underbrace{\frac{\vartheta(\frac{3}{2})}{\ln(\frac{3}{2})}}_{\vartheta(\frac{3}{2})=0} - (-1) \int_{\frac{3}{2}}^x \frac{\vartheta(t)}{t \cdot \ln^2 t} dt \\ &= \boldsymbol{\frac{\vartheta(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \cdot \ln^2 t} dt}\end{aligned}$$

□

Beachte $\int\limits_{3/2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t \cdot \ln^2 t}\, dt = \int\limits_{2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t \cdot \ln^2 t}\, dt$, weil $\vartheta(t) = 0$ für $t < 2$.

Wenn man nun Gleichung (1) durch x dividiert, erhält man
Gleichung 3

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} - \frac{1}{x}\int\limits_{2}^{x} \frac{\pi(t)}{t}\, dt$$

Und Gleichung 2 wird zu Gleichung 4, wenn durch $\frac{x}{\ln(x)}$ geteilt wird.
Gleichung 4

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\int\limits_{2}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t \cdot \ln^2 t}\, dt$$

— *Äquivalente Charakterisierungen des Primzahlsatzes* —

Die Gleichungen 3 und 4 erleichtern den Beweis zu folgenden äquivalenten Charakterisierungen des Primzahlsatzes

(1.8) Satz
Die folgenden Aussagen sind äquivalent
(i) $\pi(x) \sim x/\ln(x)$
(ii) $\vartheta(x) \sim x$
(iii) $\Psi(x) \sim x$

Beweis
"(i) ⇒ (ii)": Wegen Gleichung 3 genügt es zu zeigen, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_{2}^{x} \frac{\pi(t)}{t}\, dt = 0$.

Nach (i) ist $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$. Das bedeutet $\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$. Daraus folgt, dass ein $x_o \in \mathbb{R}$ existiert für das gilt:

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq 1{,}5 \quad \forall\, x \geq x_0$$

Da die Funktion $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ stückweise stetig ist auf [2, x_0] ($\pi(x)$ erst ab x=2 größer 0), nimmt sie dort ihr Maximum M an und es folgt:

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq c \quad \forall\, x \geq 2 \quad \text{für } c := \max\{1{,}5; M\}$$

Also gilt $\frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{c}{\ln x}$.

Damit folgt

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \leq \frac{c}{x}\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{c}{x}\left(\int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln t}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln t}\,dt\right)$$

$$\leq \frac{c}{x}\left(\frac{1}{\ln 2}(\sqrt{x}-2) + \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}(x-\sqrt{x})\right) = \frac{c}{x}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\ln 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}\right)$$

$$\leq \frac{c\cdot\sqrt{x}}{x\ln 2} + \frac{c\cdot(x-\sqrt{x})}{\frac{1}{2}\ln(x)\,x} = \frac{c}{\sqrt{x}\ln 2} + \frac{2c\cdot(1-(\sqrt{x})^{-1})}{\ln x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

"(ii) $\Rightarrow$ (i) " Wegen Gleichung 4 genügt es zu zeigen, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\cdot\ln^2 t}\,dt = 0$.

Nach der Voraussetzung (ii) ist $\vartheta(t) \sim t$. Das bedeutet $\frac{\vartheta(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$. Daraus folgt, dass ein $x_o \in \mathbb{R}$ existiert für das gilt:

$$\frac{\vartheta(t)}{t} \leq 1{,}5 \quad \forall\, x \geq x_0$$

Da die Funktion $\frac{\vartheta(t)}{t}$ stückweise stetig ist auf $[2, x_0]$, nimmt sie dort ihr Maximum K an und es folgt:

$$\frac{\vartheta(t)}{t} \leq c \quad \forall\, x \geq 2 \quad \text{für } c := \max\{1{,}5; K\}$$

Also gilt $\vartheta(t) \leq c\cdot t$.

Damit gilt:

$$0 \leq \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\cdot\ln^2 t}\,dt \leq \frac{c\cdot\ln x}{x}\int_2^x \frac{1}{\ln^2 t}\,dt \leq \frac{c\cdot\ln x}{x}\left(\int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln^2 t}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln^2 t}\,dt\right)$$

$$\leq \frac{c\cdot\ln x}{x}\left((\sqrt{x}-2)\frac{1}{\ln^2 2} + (x-\sqrt{x})\frac{1}{\ln^2\sqrt{x}}\right) \leq \frac{c\cdot\ln x}{\sqrt{x}\cdot\ln^2 2} + \frac{4c}{\ln x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Dies wurde in Lemma (1.6) bewiesen. □

Nun folgt eine Abschätzung für die psi-Funktion:

(1.9) Lemma
Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $x \geq 1$ gilt

$$\Psi(x) \leq c \cdot x$$

Beweis
Für alle Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$ gilt $p|\binom{2n}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n+j}{j}$. Bei diesem Produkt kommt jedes p als $n+j,\ j \in \{1,\ldots,n\}$ vor, jedoch nicht als j, wodurch der Quotient nicht gekürzt werden kann. Das heißt jedes p kommt in der Primzahlzerlegung von $\binom{2n}{n}$ vor und es gilt:

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k\, 1^{2n-k} \overbrace{=}^{\text{binom. Formel}} (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

Wenn man den ln auf die Ungleichung $\prod_{n<p\leq 2n} p \leq 2^{2n}$ anwendet, gilt

$$\ln\left(\prod_{n<p\leq 2n} p\right) \leq \ln(2^{2n})$$

Mit den Rechengesetzen des Logarithmus gilt

$$\sum_{n<p\leq 2n} \ln p \leq 2n \cdot \ln 2$$

und wenn man nun noch $n = 2^{j-1}$ setzt, hat man

$$\sum_{2^{j-1}<p\leq 2^j} \ln p \leq 2^j \cdot \ln 2$$

also

$$\sum_{p\leq 2^k} \ln p = \sum_{j=1}^{k} \sum_{2^{j-1}<p\leq 2^j} \ln p \leq \sum_{j=1}^{k} (2^j \cdot \ln 2) = (\sum_{j=1}^{k} 2^j) \cdot \ln 2 \overbrace{=}^{*} \frac{2^{k+1}-1}{2-1} \cdot \ln 2 \leq 2^{k+1} \cdot \ln 2$$

$* =$ geom. Summenformel

Wählt man nun k mit $2^{k-1} < x \leq 2^k$, so ergibt sich

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p \leq \sum_{p\leq 2^k} \ln p \leq 2^{k+1} \cdot \ln 2 = 2^{k-1} \cdot 4 \cdot \ln 2 \overbrace{\leq}^{(2^{k-1}\leq x)} 4x \cdot \ln 2$$

Wie in (1.6) folgt nun für alle $x \geq 1$

$$\Psi(x) = \sum_{m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \vartheta(x^{\frac{1}{m}}) \leq \sum_{m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} 4\ln 2 \cdot x^{1/m} = \sum_{2 \leq m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} 4\ln 2 \cdot x^{\frac{1}{m}} + 4\ln 2 \cdot x$$

$$\leq \sum_{2 \leq m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} 4\ln 2 \cdot \sqrt{x} + 4\ln 2 \cdot x \leq 4\ln 2 \cdot x + \frac{\ln x}{\ln 2} \cdot 4\ln 2 \cdot \sqrt{x} \leq c \cdot x$$

Anmerkung zu der letzten Abschätzung:

$$\begin{aligned} & ax + b \cdot \ln x\sqrt{x} && \leq c \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & a + \tfrac{b \cdot \ln x}{\sqrt{x}} && \leq c \end{aligned}$$

Denn $a + \frac{b \cdot \ln x}{\sqrt{x}} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \alpha$, weil der Logarithmus schwächer wächst als jede positive Potenz und $x \geq 1$.
Also existieren $\tilde{c}$, x_0 mit $a + \frac{b \cdot \ln x}{\sqrt{x}} \leq \tilde{c} \quad \forall\ x \geq x_0$. Da die Funktion $f(x) = a + \frac{b \cdot \ln x}{\sqrt{x}}$ stückweise stetig ist, nimmt sie auf $[1, x_0]$ ihr Maximum K_1 an und es gilt:

$$a + \frac{b \cdot \ln x}{\sqrt{x}} \leq c \quad \text{für } c := \max\{\tilde{c}, K_1\}.$$

§ 2 Beschäftigung mit der RIEMANNschen Zetafunktion

(2.1) Definition (RIEMANNsche Zetafunktion)

$$\zeta : \{s \in \mathbb{C}; Re(s) > 1\} \to \mathbb{C}, \qquad s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Die Zetafunktion ist holomorph auf ihrem Definitionsbereich. ◇

(2.2) Satz
$\zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$. Die Fortsetzung $\zeta(s)$ ist holomorph bis auf einen einfachen Pol mit Residuum 1 bei $s = 1$. Es gilt

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad s \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

und

$$\zeta(s) < 0 \quad \text{für alle} \quad 0 < s < 1$$

Beweis

Zunächst soll gezeigt werden, dass $\zeta(s)$ eine meromorphe Fortsetzung in die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ besitzt und diese dort holomorph ist bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$.

Man betrachte die Funktionen

$$F(s) := (1-2^{1-s})\cdot\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot(2n)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} h(n)\cdot(n)^{-s},$$

$$h(n) = \begin{cases} 2, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} (1-h(n))\cdot n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot n^{-s}$$

$$G(s) := (1-3^{1-s})\cdot\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot(3n)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\cdot n^{-s},$$

wobei g(n) = -2 für $n \equiv 0 \pmod 3$ und g(n) = 1 sonst.

Dies muss so gelten, weil bei $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot(3n)^{-s}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die ein Vielfaches von 3 sind gilt, dass $n^{-s} - 3n^{-s} = -2n^{-s}$ gerechnet wird. Somit erfüllt $g(n)$ die gewünschte Bedingung.

Es gilt aber

$$\left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\right| \leq 1, \qquad \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{N} g(n)\right| \leq 2}_{1+1-2+1+1-2...} \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

und $\sum_{n=1}^{N} g(n)$ sowie $\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}$ divergieren, weil $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolgen sind.

Damit sind die Bedingungen erfüllt, dass man (4.8) aus [1] anwenden darf, um die Konvergenzabzisse der beiden Funktionen $F(s)$ und $G(s)$ zu bestimmen:

$$\sigma_b(G) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|\sum_{n\leq N} g(n)|}{\ln N} = 0$$

und

$$\sigma_b(F) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln|\sum_{n\leq N} (-1)^{n+1}|}{\ln N} = 0,$$

weil der Zähler jeweils (wie oben gezeigt) begrenzt ist und der Logarithmus streng monoton wächst.

Die absolute Konvergenzabzisse liegt jeweils bei 1, weil $\lim_{n\to\infty} |(-1)^{n+1}| = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} |g(n)| = \infty$ und $\sigma_a = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln(N)}{\ln(N)} = 1$.

Nach (4.4) aus [1] sind die DIRICHLET-Reihen F(s) und G(s) holomorph für Re$(s) > 0$. Also ist

$$\zeta(s) = \frac{F(s)}{1-2^{1-s}} \quad \text{bzw.} \quad \zeta(s) = \frac{G(s)}{1-3^{1-s}}$$

als Quotient holomorpher Funktionen holomorph für Re$(s) > 0$ bis auf eventuelle einfache Pole an den Stellen

$$s = 1 + \frac{k\cdot 2\pi i}{\ln 2} \quad bzw. \quad s = 1 + \frac{l \cdot 2\pi i}{\ln 3} \quad \text{mit} \quad k,l \in \mathbb{Z}$$

Es handelt sich um einfache Pole, weil bei $1-2^{1-s}$ und $1-3^{1-s}$ für die gerade genannten Stellen s einfache Nullstellen vorliegen. Zwei holomorphe Fortsetzungen müssen auf dem Bereich, auf dem sie holomorph sind gleich sein. Deshalb müssen auch die möglichen Pole an den gleichen Stellen vorliegen.

Da $\frac{k}{\ln 2} = \frac{l}{\ln 3}$
$\Leftrightarrow k \cdot \ln 3 = l \cdot \ln 2$
$\Leftrightarrow \exp(k\cdot\ln 3) = \exp(l \cdot \ln 2)$
$\Leftrightarrow 3^k = 2^l$,
liegt für $k = l = 0$ die einzige Singularität 1. Ordnung bei s = 1.
Nach dem Satz von LANDAU (4.9) in [1] kann an der Stelle $\sigma_a = 1$ keine hebbare Singularität vorliegen. Deshalb muss an dieser Stelle eine Polstelle sein.

Weiter wird gezeigt, dass Res$_{s=1}\zeta(s) = 1$ ist:

Nach der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus gilt $F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ $= \ln 2$, somit gilt

$$Res_{s=1}\zeta(s) = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{F(s)}{1-2^{1-s}} = \frac{F(1)}{\ln 2} = 1,$$

denn

$$\lim_{s\to 1}\frac{1-2^{1-s}}{(s-1)} = -\frac{d}{ds}(2^{1-s})|_{s=1} = -\frac{d}{ds}\exp((1-s)\ln 2)|_{s=1}$$
$$= \exp((1-s)\ln 2)\cdot(-\ln 2)|_{s=1} = -2^{s-1}(-\ln 2)|_{s=1} = \ln(2)$$

Weiter zu zeigen: $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit Re$(s) > 1$:

Für Re (s) $>$ 1 gilt nach (4.12) in [1]

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s} = 1 \qquad \mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls}\, n = p_1 \cdots p_k \quad p_j \in \mathbb{P} \quad \text{pw. versch.} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

also $\zeta(s) \neq 0$, denn wenn ein Produkt 1 ergibt, kann kein Faktor 0 sein.

Zum Abschluss bleibt zz., dass $\zeta(s) < 0 \quad$ für alle $\quad 0 < s < 1$:

Ist $s \in \mathbb{R}$ mit $0 < s < 1$, so hat man

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n^{-s} > 0$$

denn die Folge $\left((-1)^{n+1} \cdot n^{-s}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend und somit ist der Anfangswert bei $n = 1$ der größte. Dieser ist positiv. Es liegt also eine Folge von abwechselnd positiven und negativen Zahlen vor, wobei bei jedem Paar von einer positiven und einer negativen Zahl die Positive die größere Zahl ist.
Da außerdem $1 - 2^{1-s} < 0$ ist, gilt insgesamt $\zeta(s) < 0$.

Damit wurden bereits einige Eigenschaften der Zetafunktion demonstriert. Es folgt ein Korollar zur Nullstellenfreiheit der ζ-Funktion auf einem bestimmten Gebiet.

(2.3) Korollar
Sei $M(x) = \sum_{n \geq x} \mu(n) \quad$ und $\quad \theta = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}; M(x) = \mathcal{O}(x^{\sigma})\, \text{für}\, x \geq 1\}$.
Dann ist die RIEMANNsche Zetafunktion nullstellenfrei auf der Halbebene
$\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > \theta\}$ ist. $\diamond$

Beweis
Die Möbius-sche μ-Funktion ist eine zahlentheoretische Funktion. Wenn man θ für die Konvergenzabzisse σ_b schreibt, gilt nach (4.8) in [1]:

$$\text{Wenn}\, D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s}\, \text{für}\, x \geq 0\, \text{an der Stelle}\, s = 0\, \text{divergiert, so gilt}$$

$$\theta = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}; M(x) = \mathcal{O}(x^{\sigma})\, \text{für}\, x \geq 1\}.$$

Zeige also, dass $\quad D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \quad$ divergiert:

Da $\mu(n)$ keine Nullfolge ist, weil $\mu(n)$ immer wieder die Werte 1 und -1 annimmt, kann $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)$ nicht konvergieren.

Nach Korollar (4.12) aus [1] ist $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Falls nun $\theta > 1$ ist, konvergiert $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s}$ auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re}(s) > \theta\}$. Also ist $\frac{1}{\zeta(s)}$ dort insbesondere definiert, weshalb gelten muss $\zeta(s) \neq 0$ auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re}(s) > \theta\}$.
Falls $0 \leq \vartheta \leq 1$ gilt, lässt sich $\frac{1}{\zeta(s)}$ über $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot n^{-s}$ bis $\mathrm{Re}(s) > \vartheta$ holomorph fortsetzen. Die Fortsetzung von $\zeta(s)$ muss dort nullstellenfrei sein.

Es folgt eine Abschätzung mit der Zetafunktion:

(2.4) Lemma
Für $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\zeta^3(s) \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

Beweis
Voraussetzungen:

a) Für $n = p^m$ gilt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln(n)} \cdot n^{-s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln p}{\ln(p^m)} \cdot (p^m)^{-s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln p}{m \ln(p)} \cdot p^{-ms} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-ms}$$

b)

$$\begin{aligned} p^{-ms} = \exp(-ms \cdot \ln p) \overbrace{=}^{s=\sigma+it} \exp[-m(\sigma + it) \cdot \ln p] &= \exp(-m\sigma \ln p) \cdot \exp(-mit \ln p) \\ &= p^{-m\sigma} \cdot e^{-imt \ln p} \end{aligned}$$

c)

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{für alle}\, z \in \mathbb{C}$$

d)

$$\exp(-iz) = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos(z) + i \sin(-z),\; z \in \mathbb{R}$$

Also ist

$$\mathrm{Re}(\exp(-iz)) = \cos(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

Nach (4.18) aus [1] gilt für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma = Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = e^{G(s)}, \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln(n)} \cdot n^{-s} \overbrace{=}^{a)} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-ms} \overbrace{=}^{b)} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot e^{-imt \ln p}$$

Daraus folgt

$$|\zeta(s)| \overbrace{=}^{c)} \exp(\mathrm{Re}(G(s))) \overbrace{=}^{d)} \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot \cos(mt \ln p)\right)$$

und damit

$$\zeta^3(\sigma) \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)|$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma}\right)^3 \cdot \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot \cos(mt \ln p)\right)^4 \\
&\quad \cdot \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot \cos(2mt \ln p)\right) \\
&= \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot 3\right) \cdot \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot \cos(mt \ln p) \cdot 4\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot \cos(2mt \ln p)\right) \\
&= \exp\left(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot (3 + 4\, \cos(mt \ln p) + \cos(2mt \ln p))\right).
\end{aligned}$$

Wegen

$$3 + 4\, \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) = 3 + 4\, \cos(\varphi) + 2\cos^2(\varphi) - 1 = 2 \cdot (1 + \cos\varphi)^2 \geq 0$$

ist auch $\sum\limits_p \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot p^{-m\sigma} \cdot (3 + 4\, \cos(mt \ln p) + \cos(2mt \ln p)) \geq 0$ und wenn man nun die Exponentialfunktion auf diese Summe anwendet, ist das Ergebnis ≥ 1.
Insgesamt folgt

$$\zeta^3(\sigma) \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

In dem folgenden Korollar wird man sehen, wie Dirichlet-Reihen und die Zetafunktion in Zusammenhang gebracht werden können.

(2.5) Korollar
Gegeben seien die DIRICHLET-Reihe

$$D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{ai}(n)|^2 \cdot n^{-s} \quad \text{mit} \quad \sigma_{ai}(n) := \sum_{d|n} d^{ai}$$

sowie die Funktion

$$f(s) = \frac{\zeta(s)^2 \zeta(s+ai)\zeta(s-ai)}{\zeta(2s)}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ fest. Dann gelten die folgenden zwei Annahmen:

a) Sei σ die Konvergenzabzisse von D. Dann gilt $f(s) = D(s)$ für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > \max(\sigma, 0)$. Da $f(\frac{1}{2}) = D(\frac{1}{2})$ unmöglich ist, folgt $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

b) Die Annahme $\zeta(1+ai) = 0$ stellt einen Widerspruch zum Satz von LANDAU dar.

Beweis
a) Man benutze aus Aufgabe 7c), Seite 43 in [1]:

$$\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{w(n)} \cdot n^{-s} \text{ mit } w(n) := \text{ Anzahl der verschiedenen Primteiler von n}$$

Des weiteren gilt

$$\zeta(s+ai) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ai}\, n^{-s} \quad \text{und} \quad \zeta(s-ai) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{ai}\, n^{-s}$$

Damit ist

$$f(s) = \frac{\zeta(s)^2\, \zeta(s+ai)\, \zeta(s-ai)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{w(n)}\, n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{ai}\, n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ai}\, n^{-s}.$$

Dieses Produkt lässt sich nach der Dirichletschen-Faltung (2.3) in [1] berechnen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{w(n)}\, n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ai}\, n^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{ai}\, n^{-s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{ebc=n} 2^{w(e)} \cdot b^{-ai} \cdot c^{ai} \right] n^{-s} = D(s)$$

Auf diesem Wege kann man die Gleichheit zeigen.

b) $f(s) = \dfrac{\zeta(s)^2\,\zeta(s+ai)\,\zeta(s-ai)}{\zeta(2s)}$ ist holomorph für $s \in \mathbb{C} \setminus \{1, 1+ai, 1-ai, \frac{1}{2}\}$, $a \in \mathbb{R}$ fest und ist nullstellenfrei für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ nach Satz (5.6) aus [1].

Nach Voraussetzung gilt, dass $\zeta(1+ai) = 0$. Daraus folgt, dass $\zeta(1-ai) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(1-ai)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, n^{ai} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, e^{ai\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, e^{\overline{-ai\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{n^{-(1+ai)}} = \zeta(\overline{1+ai}) = \bar{0} = 0.$

An der Stelle $s = 1$ $\left(f(1) = \frac{\zeta(1)^2\,\zeta(1+ai)\,\zeta(1-ai)}{\zeta(2)}\right)$ kann man $f(s)$ dann holomorph fortsetzen, weil die doppelte Nullstelle die zweifache Polstelle bei $\zeta(1)^2$ weghebt.

Die Funktion $\zeta(2s)$ hat an der Stelle $s = \frac{1}{2}$ einen einfachen Pol nach (2.2). Deshalb hat $\frac{1}{\zeta(2s)}$ an dieser Stelle eine hebbare Singularität und damit auch $f(s)$.

Aus a) wissen wir, dass $D(s) = f(s)$ für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma, 0\}$ gilt, wobei σ die Konvergenzabzisse von D ist.

$\sigma = 1$ kann nicht die Konvergenzabzisse von D sein, weil $D(s)$ an der Stelle $s = 1$ nach dem Satz von Landau ((4.9) in [1]) keine hebbare Singularität haben darf. Mit $f(s)$ haben wir jedoch gezeigt, dass dort eine vorliegt.
Das Gleiche gilt an der Stelle $s = \frac{1}{2}$. Wäre $\sigma = \frac{1}{2}$ die Konvergenzabzisse von $D(s)$, dann dürfte an dieser Stelle keine hebbare Singularität vorliegen, tut es aber, wie mit f gezeigt. Die Konvergenzabzisse müsste also links von $\frac{1}{2}$ liegen. Nach a) gilt aber $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Widerspruch.

— *Literaturhinweis* —

[1] Krieg, Aloys, Prof. Dr. (2009). Analytische Zahlentheorie, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen Universität.