Der Primzahlsatz, Teil 2

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 14.05.2012

Maike Gerhard

Ziel dieses Vortrags ist es den *Primzahlsatz* zu beweisen. Dieser besagt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \qquad \text{d.h.} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1,$$

wobei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x bezeichnet. Er beschreibt demnach die asymptotische Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x für $x \to \infty$. Vermutet wurde er bereits von GAUSS (1792) und LEGENDRE (1798), bewiesen wurde er allerdings erst rund hundert Jahre später unabhängig von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN.

Wir werden zuerst einige Hilfsaussagen beweisen, aus denen wir dann die Gültigkeit des *Primzahlsatz* folgern. In der gesamten Ausarbeitung werden die Bezeichnungen des Skripts zur *Analytischen Zahlentheorie* verwendet.

§1 Wiederholung

In diesem Abschnitt werden noch einmal Definitionen, Lemmata und Sätze aufgezählt, die bereits aus dem Vortrag "Der Primzahlsatz, Teil 1" bekannt sind, in den nachfolgenden Beweisen jedoch verwendet werden und daher der Vollständigkeit halber nicht fehlen sollten. Auf Beweise der Sätze und Lemmata wird hier verzichtet und auf den oben genannten Vortrag verwiesen.

— *Bereits bekannte Sätze und Definitionen* —

(1.1) Definition (CHEBYSHEVsche psi- und theta-Funktion)
Sei π die Primzahlzählfunktion. Man definiert die CHEBYSHEVsche psi-Funktion $\Psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und die CHEBYSHEVsche theta-Funktion $\theta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\Psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \qquad \text{und} \qquad \theta(x) := \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \ln(p).$$ ◇

(1.2) Lemma
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

ii) $\theta(x) \sim x$.

iii) $\Psi(x) \sim x$. ◇

(1.3) Lemma
Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $x \geq 1$ gilt

$$\Psi(x) \leq c \cdot x.$$ ◇

(1.4) Satz
Die RIEMANNsche Zetafunktion $\zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die Halbebene Re(s) > 0. Die Fortsetzung $\zeta(s)$ ist holomorph bis auf einen einfachen Pol mit Residuum 1 bei s = 1. Es gilt

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \qquad \text{und} \qquad \zeta(x) < 0 \quad \forall \quad x \in (0,1).$$ ◇

(1.5) Lemma
Für σ > 1 und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\zeta^3(\sigma) \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$ ◇

§2 Beweis des Primzahlsatzes

Am Ende dieses Abschnittes wird endlich der *Primzahlsatz* bewiesen und eine aus ihm resultierende Folgerung verifiziert. Vorerst müssen jedoch mit Hilfe der Sätze und Lemmata aus Paragraph 1 einige Hilfsaussagen bewiesen werden.

(2.1) Satz
Für alle $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt $\zeta(1+it) \neq 0$. ◇

Beweis
Für alle $\sigma > 1$ gilt nach (1.5)

$$\zeta^3(\sigma) \cdot |\zeta(\sigma+it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Wegen σ - 1 > 0 erhalten wir nach Division beider Seiten durch (σ - 1)

$$((\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma))^3 \cdot \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 \cdot |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}. \tag{1}$$

Nach (1.4) hat $\zeta(s)$ einen einfachen Pol mit Residuum 1 an der Stelle $s = 1$. Aus der Funktionentheorie I wissen wir demnach, dass

$$Res_1(\zeta) = \lim_{\sigma\downarrow 1}(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma) = 1 \tag{2}$$

ist. Angenommen es gibt ein $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\zeta(1+it) = 0$. Dann gilt für die Ableitung an dieser Stelle:

$$\zeta'(1+it) = \lim_{\sigma\downarrow 1}\frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{(\sigma+it)-(1+it)} = \lim_{\sigma\downarrow 1}\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt nun

$$\lim_{\sigma\downarrow 1}((\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma))^3 \cdot \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 \cdot |\zeta(\sigma+2it)| = |\zeta'(1+it)|^4 \cdot |\zeta(1+2it)|.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist wegen der Holomophiebereiche von ζ und ζ' eine feste reelle Zahl. Dies ergibt einen Widerspruch, denn die rechte Seite von (1) strebt für $\sigma \downarrow 1$ gegen ∞. Damit gilt

$$\zeta(1+it) \neq 0 \qquad \forall \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$ □

Das nachfolgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen der RIEMANNschen Zetafunktion und der CHEBYSHEVschen psi-Funktion her.

(2.2) Lemma
Für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \cdot n^{-s} = s \cdot \int_1^{\infty} \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t.$$

$\diamond$

Beweis
Sei $s = \sigma + it$ mit $\sigma > 1$.
Wir wissen bereits[1], dass

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \quad \text{mit} \quad G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \cdot n^{-s}}{\ln n}$$

ist. Daraus und aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe G folgt sofort

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\frac{e^{G(s)} \cdot G'(s)}{e^{G(s)}} = -G'(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \cdot n^{-s}}{\ln n} \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} n^{-s} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \cdot (-\ln(n)) \cdot n^{-s} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \cdot n^{-s}. \end{aligned}$$

Nach dem ABELschen Lemma[2] gilt für eine zahlentheoretische Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $F : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, $F(x) := \sum_{n=1}^{x} f(n)$ und jede stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad 0 < a < b$:

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) \cdot g(n) = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(t) \cdot g'(t) \mathrm{d}t.$$

[1] [2] Kapitel I, Korollar (4.18).
[2] [2] Kapitel I, Satz (4.1)a.

Mit $f(n) = \Lambda(n)$, das heißt $F(x) = \Psi(x)$, und $g : [1, N] \to \mathbb{C}, \quad g(x) = x^{-s}$ hat man

$$\begin{aligned}\sum_{1<n\leq N} \Lambda(n) \cdot n^{-s} &= \Psi(N) \cdot N^{-s} - \Psi(1) \cdot 1^{-s} + s \int_1^N \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t \\ &= \Psi(N) \cdot N^{-s} + s \int_1^N \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t \\ &\longrightarrow s \int_1^\infty \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t, \quad N \to \infty,\end{aligned}$$

denn es ist $\Psi(1) = 0$ und g ist holomorph auf der Schlitzebene $\mathbb{C}_-$ mit $g'(x) = -s \cdot x^{-s-1}$. Außerdem folgt aus (1.3)

$$0 \leq \left| \lim_{N\to\infty} \Psi(N) \cdot N^{-s} \right| \leq \left| \lim_{N\to\infty} \frac{c \cdot N}{N^s} \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{c}{N^{\sigma-1}} = 0,$$

weil $\sigma > 1$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^\infty \Lambda(n) \cdot n^{-s} = s \cdot \int_1^\infty \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t.$$

□

(2.3) Lemma
Es bezeichne Ψ die CHEBYSHEVsche psi-Funktion. Dann ist

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} \leq 1 \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x}.$$

◇

Beweis
Wir definieren zunächst

$$m := \liminf_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} \quad \text{und} \quad M := \limsup_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x}.$$

$\zeta(s)$ ist holomorph auf der Menge $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$ und hat einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 im Punkt $s = 1$. Als Ableitung von $\zeta(s)$ ist $\zeta'(s)$ ebenfalls meromorph auf $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0\}$ mit zweifachem Pol an der Stelle $s = 1$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \text{hat einen Pol erster Ordnung in } s = 1.$$

Nun wollen wir das zugehörige Residuum bestimmen. Sei $\gamma := \partial K_\rho(1)$, wobei ρ so gewählt ist, dass weder ζ noch ζ' auf dem betrachteten Kreis Nullstellen besitzen. (OBdA $\rho < 1/2$). γ ist nullhomolog in $\mathrm{Re}(s) > 0$. Nach dem Residuensatz[3] gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathrm{d}s = \frac{2\pi i}{2\pi i}\cdot \underbrace{n_\gamma(1)}_{=1} \cdot Res_1\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = Res_1\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right).$$

Außerdem folgt mit dem Satz vom Argumentprinzip[4]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathrm{d}s = \underbrace{0}_{\text{keine Nullstellen}} - \underbrace{1\cdot 1}_{\text{ein Pol 1. Ordnung}} = -1.$$

Damit ist

$$Res_1\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = -1.$$

Aus der Funktionentheorie I ist bekannt[5], dass in diesem Fall gilt:

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\cdot\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -1.$$

Mit Lemma (2.2) lässt sich folgern

$$\lim_{s\to 1} -(s-1)\cdot\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{s\to 1}(s-1)\cdot s\int\limits_1^\infty \Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t = 1.$$

Für beliebiges $n_0 \geq 1$ gilt

$$\lim_{s\to 1}\underbrace{(s-1)\cdot s\int\limits_1^{n_0}\Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t}_{\to 0, s\to 1} + (s-1)\cdot s\int\limits_{n_0}^\infty \Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t = 1.$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{s\to 1}(s-1)\cdot s\int\limits_{n_0}^\infty \Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t = 1.$$

Da $\Psi(t)$ für $t\in[n, n+1), n\in\mathbb{N}$, konstant den Wert $\Psi(n)$ annimmt gilt

$$\int\limits_{n_0}^\infty \Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^\infty\int\limits_n^{n+1}\Psi(n)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t$$

[3] [1] Kapitel VI, Satz (1.5).
[4] [1] Kapitel VI, Satz (2.1).
[5] [1] Kapitel VI, Lemma (1.4)b.

und damit weiter

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \Psi(n) \cdot (n+1)^{-s-1} \leq \int_{n_0}^{\infty} \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \Psi(n) \cdot n^{-s-1}. \tag{4}$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Definition von Limes inferior und Limes superior existiert ein $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$m - \epsilon \leq \frac{\Psi(n)}{n} \leq M + \epsilon \qquad \forall n \geq n_1.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ existiert außerdem ein $n_2 = n_2(\epsilon)$ mit

$$\frac{n}{n+1} \geq 1 - \epsilon \qquad \forall n \geq n_2.$$

Wählt man $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$(*) \qquad m - \epsilon \leq \frac{\Psi(n)}{n} \leq M + \epsilon \quad \text{und}$$

$$(**) \qquad \frac{n}{n+1} \geq 1 - \epsilon.$$

Damit folgt

i)

$$\begin{aligned}
\int_{n_0}^{\infty} \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t &\overset{(4)}{\leq} \sum_{n=n_0}^{\infty} \Psi(n) \cdot n^{-s-1} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\Psi(n)}{n} \cdot n^{-s} \overset{(*)}{\leq} (M+\epsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-s} \\
&= (M+\epsilon) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{n_0-1} n^{-s} \right) = (M+\epsilon) \left(\zeta(s) - \sum_{n=1}^{n_0-1} n^{-s} \right) \\
\implies \qquad 1 &= \lim_{s\to 1} (s-1) \cdot s \cdot \int_{n_0}^{\infty} \Psi(t) \cdot t^{-s-1} \mathrm{d}t \\
&\leq \lim_{s\to 1} s \cdot (M+\epsilon) \cdot \underbrace{(s-1)\zeta(s)}_{\to Res_1(\zeta)=1, s\to 1} \underbrace{- s \cdot (M+\epsilon) \cdot (s-1) \sum_{n=1}^{n_0-1} n^{-s}}_{\to 0, s\to 1} \\
&= M + \epsilon.
\end{aligned}$$

Weil ϵ beliebig gewählt war folgt

$$1 \leq M = \limsup_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x}.$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\int_{n_0}^{\infty} \Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t &\overset{(4)}{\geq} \sum_{n=n_0}^{\infty} \Psi(n)\cdot (n+1)^{-s-1} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\Psi(n)}{n}\cdot (n+1)^{-s-1}\cdot n \\
&\overset{(*)}{\geq} (m-\epsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1)^{-s}\cdot \frac{n}{n+1} \overset{(**)}{\geq} (m-\epsilon)\sum_{n=n_0}^{\infty}(n+1)^{-s}(1-\epsilon) \\
&= (m-\epsilon)(1-\epsilon) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-s} \\
&= (m-\epsilon)(1-\epsilon) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{n_0} n^{-s} \right) \\
&= (m-\epsilon)(1-\epsilon) \left(\zeta(s) - \sum_{n=1}^{n_0} n^{-s} \right) \\
\implies \qquad 1 &= \lim_{s\to 1} (s-1)\cdot s\cdot \int_{n_0}^{\infty} \Psi(t)\cdot t^{-s-1}\mathrm{d}t \\
&\geq \lim_{s\to 1} (m-\epsilon)(1-\epsilon)s \underbrace{(s-1)\zeta(s)}_{\to Res_1(\zeta)=1, s\to 1} \underbrace{- s(m-\epsilon)(1-\epsilon)(s-1)\sum_{n=1}^{n_0} n^{-s}}_{\to 0, s\to 1} \\
&= (m-\epsilon)(1-\epsilon).
\end{aligned}
$$

Wegen $\lim_{\epsilon\to 0}(m-\epsilon)(1-\epsilon) = m$ erhält man

$$
1 \geq m = \liminf_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x}.
$$

Mit (i) und (ii) hat man insgesamt

$$
\liminf_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} \leq 1 \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x}.
$$

□

Nun kommen wir zu den zentralen Hilfsmitteln des Beweises.

(2.4) Satz

Die Funktion $F : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ sei beschränkt und $F|_{[0,R]}$ sei für jedes $R > 0$ RIEMANN-integrierbar. Dann ist die Funktion

$$
G(s) := \int_0^{\infty} F(x) e^{-xs}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Re}(s) > 0,
$$

holomorph. Hat G in jedem Punkt it der imaginären Achse eine holomorphe Fortsetzung in eine geeignete Umgebung von it, so existiert das uneigentlich RIEMANN-Integral

$$G(0) = \int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x.$$

◇

Bemerkung
Auf die an G gestellte Zusatzbedingung kann nicht verzichtet werden. Beispielsweise gilt für $F(x) = 1$:

$$G(s) = \int_0^\infty F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-xs}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Diese Funktion hat einen einfachen Pol bei $s = 0$ und ist somit in keine Umgebung von 0 holomorph fortsetzbar. Das uneigentliche RIEMANN-Integral existiert hier nicht, denn

$$\int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty 1\mathrm{d}x = \infty.$$

Beweis
Da F beschränkt ist existiert ein $c > 0$ mit $|F(x)| \leq c$ für alle $x \in [0, \infty)$. Sei K ein beliebiges Kompaktum in der rechten Halbebene und $\sigma_0 := \min\{\mathrm{Re}(z) | z \in K\} > 0$. Für $s \in K$ mit $s = \sigma + it$ hat man

$$|F(x)e^{-xs}| = |F(x)| \cdot |e^{-x(\sigma+it)}| = |F(x)| \cdot |e^{-x\sigma}| \cdot |e^{-ixt}| \leq ce^{-x\sigma} \leq ce^{-x\sigma_0}.$$

Wegen $\sigma_0 > 0$ konvergiert das Integral $\int_0^\infty ce^{-x\sigma_0}\mathrm{d}x$. Damit konvergiert $\int_0^\infty \mathrm{F}(x)e^{-xs}\mathrm{d}x$ gleichmäßig für s aus K. Weil $s \mapsto F(x)e^{-xs}$ für jedes $x \in [0, \infty)$ eine holomorphe Funktion ist, ist auch $G(s)$ nach Funktionentheorie I holomorph für $s \in \mathring{K}$. Da K ein beliebiges Kompaktum war, ist $G(s)$ sogar auf der ganze rechten Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorph. Schließlich hat jedes s aus der rechten Halbebene einen positiven Abstand δ_s zur imaginären Achse, sodass beispielsweise $\overline{K_{\delta_s/2}(s)}$ ganz in der rechten Halbebene liegt. Wir definieren für $\lambda > 0$

$$G_\lambda(s) := \int_0^\lambda F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x.$$

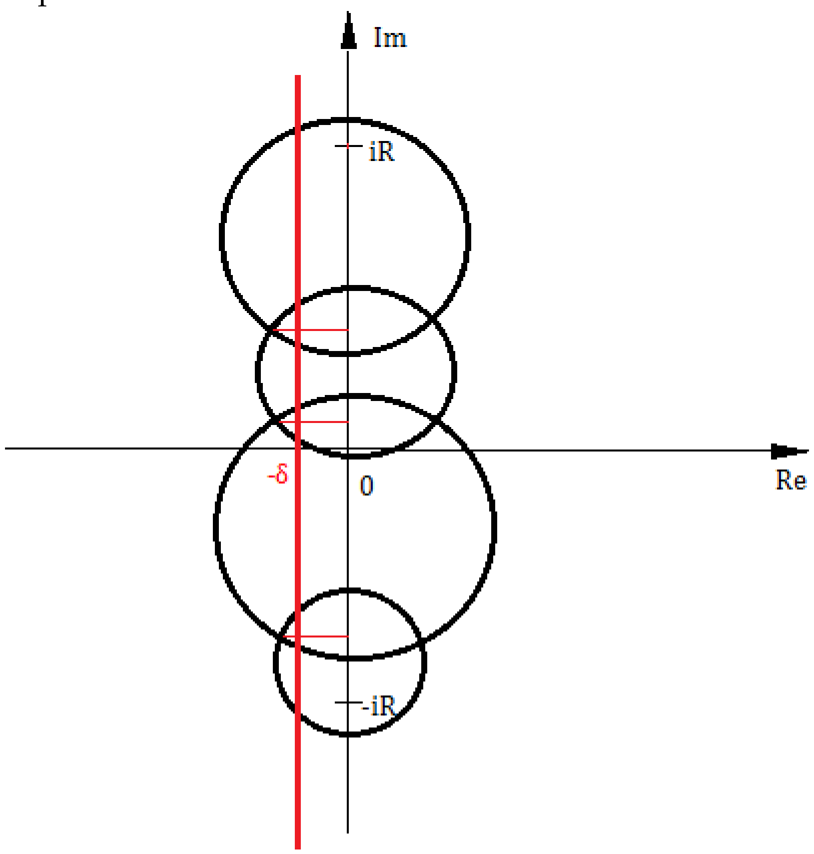
Nach der Funktionentheorie I[6] ist dann wie $s \mapsto e^{-xs}$ auch G_λ für alle λ eine ganze Funktion von s.

Beh.: $G_\lambda(0) = \int\limits_0^\lambda F(x)\mathrm{d}x \longrightarrow G(0)$ für $\lambda \to \infty$.

Bew.: Wir stellen $G(0) - G_\lambda(0)$ mit Hilfe der CAUCHYschen Integralformel dar und schätzen ab. Sei $R > 0$. Da G in jedem Punkz it der imaginären Aches eine holomorphe Fortsetzung in eine geeignete Umgebung besitzt, existiert für alle $z \in M := \{it \in \mathbb{C} | t \in [-R, R]\}$ ein ρ_z, sodass G auf $K_{\rho_z}(z)$ holomorph ist. Die Menge $\{K_{\rho_z}(z) | z \in M\}$ stellt eine Überdeckung von M dar. Da M kompakt ist existiert eine endliche Teilüberdeckung von M:

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_{\rho_{z_i}}(z_i), \quad n \in \mathbb{N}, \quad z_i \in M.$$

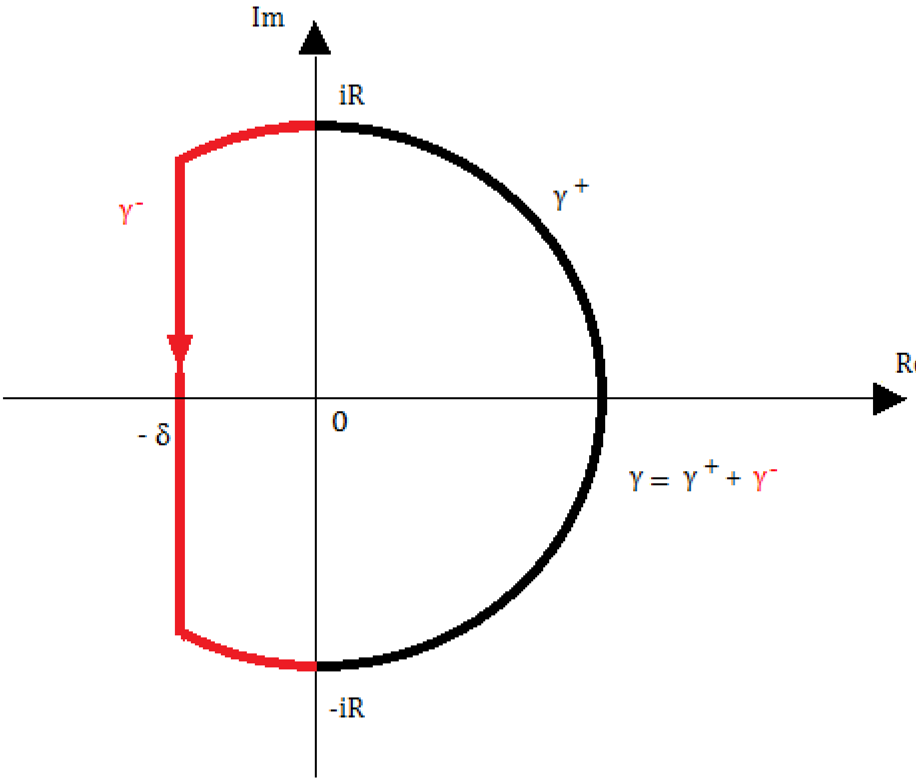
Somit existiert ein $0 < \delta = \delta_R < R$, sodass das durch den Kreis um 0 mit Radius R und die Gerade $-\delta + i\mathbb{R}$ begrenzte Kompaktum, welches 0 enthält, ganz im Holomorphiebereich von G enthalten ist.



Es soll kurz begründet werden, warum es ein solches δ geben muss. Weil obige

[6][1] Kapitel II, Satz (3.4)c.

Überdeckung aus nur endlich vielen Kreisen besteht, gibt es nur endlich viele Punkte in denen sich diese Kreise schneiden. Einer dieser Punkte hat demnach minimalen Abstand zur imaginären Achse. Halbiert man diesen Abstand, so erhält man einen möglichen Kandidaten für δ. Im Folgenden bezeichne γ die positiv orientierte Randkurve des Kompaktums.



Wir verwenden einen Trick von NEWMAN und folgern aus dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s = G(0)-G_\lambda(0). \tag{5}$$

Denn mit G und G_λ ist auch $(G(s)-G_\lambda(s))e^{\lambda s}$ in dem betrachteten Gebiet holomorph, so dass aus der CAUCHYschen Integralformel[7] folgt

$$G(0)-G_\lambda(0) = (G(0)-G_\lambda(0))e^{\lambda\cdot 0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}}{s}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}}{s}\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot\frac{s}{R^2}\mathrm{d}s.$$

[7] [1] Kapitel IV, Satz (2.3).

Bei der letzten Umformung wurde verwendet, dass das Integral über eine Funktion entlang eines geschlossenen Weges verschwindet, sofern die Funktion auf dem gesamten umrandeten Gebiet holomorph ist. Wir definieren

$$\mathrm{Sp}\gamma^+ := \{s \in \mathrm{Sp}\gamma | \mathrm{Re}(s) > 0\} \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp}\gamma^- := \{s \in \mathrm{Sp}\gamma | \mathrm{Re}(s) \leq 0\}.$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die linke Seite von (5) für $\lambda \to \infty$ gegen 0 konvergiert, woraus die Behauptung direkt folgt. Wir gehen bei diesem etwas längeren Beweis in mehreren Schritten vor

1) Zeigen: $\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+}(G(s) - G_\lambda(s)) \cdot e^{\lambda s} \cdot (\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right|$ ist durch eine von R abhängige Konstante nach oben beschränkt.
2) Zeigen: $\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-} G_\lambda(s) \cdot e^{\lambda s} \cdot (\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right|$ ist durch eine von R abhängige Konstante nach oben beschränkt.
3) Zeigen: $\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-} G(s) \cdot e^{\lambda s} \cdot (\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right|$ ist für genügend große λ nach oben beschränkt.
4) Folgern aus $(1) - (3)$ die Behauptung.

Zu (1): Für $s \in \mathrm{Sp}\gamma^+$ mit $s = \sigma + it$ gilt $|s|^2 = s\bar{s} = R^2$ und damit

$$\begin{aligned}
\left|(G(s) - G_\lambda(s)) \cdot e^{\lambda s} \cdot (\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2})\right| &= |(G(s) - G_\lambda(s))| \cdot \left|e^{\lambda(\sigma+it)}\right| \cdot \left|\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right| \\
&= |(G(s) - G_\lambda(s))| \cdot e^{\lambda\cdot\sigma} \cdot \left|\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right| \\
&= \left|\int\limits_0^\infty F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x - \int\limits_0^\lambda F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x\right| \cdot e^{\lambda\sigma} \cdot \left|\frac{\bar{s}}{s\bar{s}} + \frac{s}{R^2}\right| \\
&= \left|\int\limits_\lambda^\infty F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x\right| \cdot e^{\lambda\sigma} \cdot \left|\frac{\bar{s}+s}{R^2}\right| \\
&\leq \left(\int\limits_\lambda^\infty |F(x)|e^{-x\sigma}\mathrm{d}x\right) \cdot e^{\lambda\sigma} \cdot \left|\frac{\bar{s}+s}{R^2}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_\lambda^\infty ce^{-x\sigma}\mathrm{d}x\right)\cdot e^{\lambda\sigma}\cdot\frac{2\sigma}{R^2}\\
&= c\left[-\frac{1}{\sigma}e^{-x\sigma}\right]_\lambda^\infty\cdot e^{\lambda\sigma}\cdot\frac{2\sigma}{R^2}\\
&= c\cdot(0+e^{-\lambda\sigma})\cdot e^{\lambda\sigma}\cdot\frac{2}{R^2}=\frac{2c}{R^2}.
\end{aligned}$$

Also folgt für $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma^+}\left|(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\right|\mathrm{d}s\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma^+}\frac{2c}{R^2}\mathrm{d}s\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2c}{R^2}\cdot\pi R=\frac{c}{R}.
\end{aligned}$$

Zu (2): Für $\sigma = \mathrm{Re}(s) < 0$ hat man

$$\begin{aligned}
|G_\lambda(s)| &= \left|\int_0^\lambda F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^\lambda|F(x)|\cdot|e^{-xs}|\mathrm{d}x\leq c\int_0^\lambda e^{-x\sigma}\mathrm{d}x\\
&= c\left[-\frac{1}{\sigma}e^{-x\sigma}\right]_0^\lambda=\frac{c}{-\sigma}e^{-\lambda\sigma}+\frac{c}{\sigma}<\frac{c}{|\sigma|}e^{-\lambda\sigma}.
\end{aligned}$$

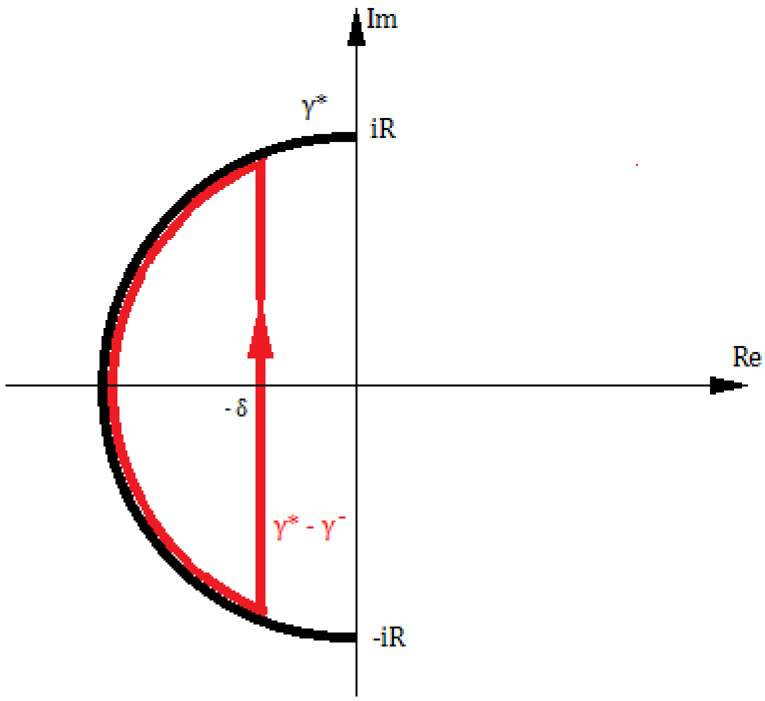
Für die letzte Umformung beachte man, dass $\sigma < 0$ und damit $|\sigma| = -\sigma$ ist. Mit $\bar{s} + s = 2\mathrm{Re}(s) = 2\sigma$ folgt

$$|G_\lambda(s)|\cdot e^{\lambda\sigma}\cdot\left|\frac{\bar{s}+s}{R^2}\right|<\frac{2c}{R^2}\qquad\forall\sigma<0.$$

Wegen der Stetigkeit der beteiligten Funktionen gilt sogar

$$(*)\qquad |G_\lambda(s)|\cdot e^{\lambda\sigma}\cdot\left|\frac{\bar{s}+s}{R^2}\right|\leq\frac{2c}{R^2}\qquad\forall\sigma\leq 0.$$

Sei γ^* so definiert, dass $\gamma^+ + \gamma^*$ den positiv orientierten Kreis mit Radius R um 0 ergibt. Dann ist $\gamma^* - \gamma^-$ nullhomolog in $\mathbb{C}^*$, wegen $n_{\gamma^*-\gamma^-}(0) = 0$.



Weil $G_\lambda(s)$ eine ganze Funktion ist und die 0 nicht im Inneren von $\gamma^* - \gamma^-$ liegt, liefert der CAUCHYsche Integralsatz

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \displaystyle\int\limits_{\gamma^*-\gamma^-} G_\lambda(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right)\mathrm{d}s & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \displaystyle\int\limits_{\gamma^*} G_\lambda(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right)\mathrm{d}s & = & \displaystyle\int\limits_{\gamma^-} G_\lambda(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right)\mathrm{d}s
\end{array}
$$

und daher

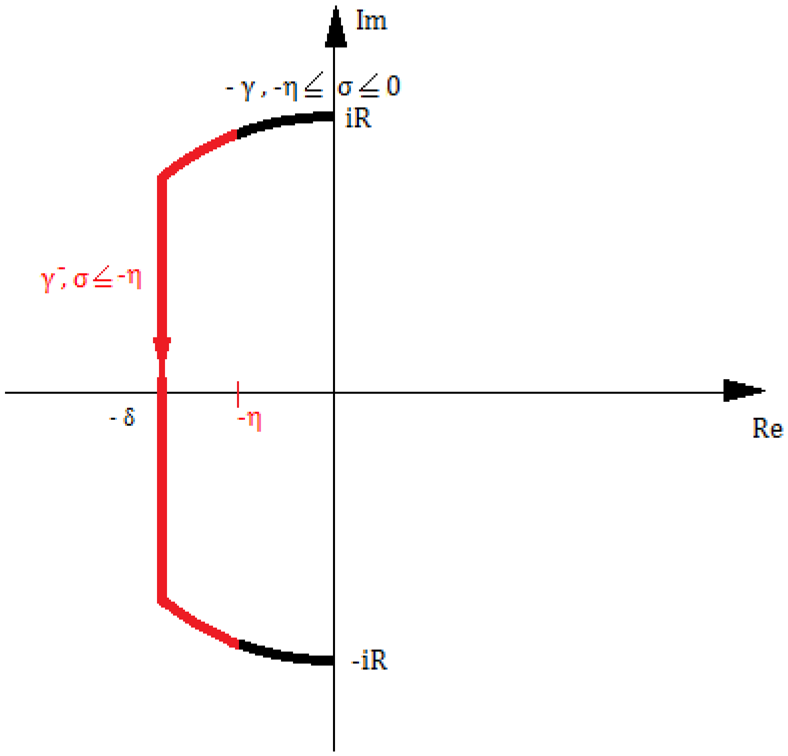
$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-} G_\lambda(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right)\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma^*} |G_\lambda(s)|\cdot|e^{\lambda s}|\cdot\left|\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right|\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma^*} |G_\lambda(s)|\cdot e^{\lambda\sigma}\cdot\left|\frac{\bar{s}+s}{R^2}\right|\mathrm{d}s \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma^*} \frac{2c}{R^2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{c}{\pi R^2}\cdot\mathrm{L}(\gamma^*) = \frac{c}{\pi R^2}\cdot\pi R = \frac{c}{R}.
\end{aligned}
$$

Die Aussage aus $(*)$ kann hier verwendet werden, da für alle $s \in \mathrm{Sp}(\gamma^*)$ gilt $\mathrm{Re}(s) = \sigma \leq 0$.

Zu (3): Nun sei

$$C' := \max_{s \in \mathrm{Sp}\gamma^-} |G(s)| \cdot \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right|.$$

Dieses Maximum existiert, da $\mathrm{Sp}\gamma^-$ kompakt ist und $s \mapsto G(s) \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right)$ auf Grund der Wahl von δ_R holomorph, also insbesondere stetig, auf $\mathrm{Sp}\gamma^-$ ist.
Sei $\epsilon > 0$.



Wir wählen η mit $0 < \eta < \delta$, so dass

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-, -\eta \leq \sigma \leq 0} G(s) \cdot e^{\lambda s} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2}\right) \mathrm{d}s \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma^-, -\eta \leq \sigma \leq 0} |G(s)| \cdot \underbrace{e^{\lambda\sigma}}_{\leq 1} \cdot \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| \mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot C' \left| \int_{\gamma^-, -\eta \leq \sigma \leq 0} \mathrm{d}s \right| < \epsilon.$$

Ein solches η existiert, wegen

$$\mathrm{L}(\gamma^-, -\eta \leq \sigma \leq 0) \to 0, \quad \text{für} \quad \eta \to 0.$$

Mit ebendiesem η erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-,\sigma\leq-\eta} G(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma^-,\sigma\leq-\eta} |G(s)|\cdot\underbrace{e^{\lambda\sigma}}_{\leq e^{-\lambda\eta}}\cdot\left|\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2}\right|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{e^{-\lambda\eta}}{2\pi}\cdot C'\underbrace{\left|\int\limits_{\gamma^-,\sigma\leq-\eta}\mathrm{d}s\right|}_{\leq\mathrm{L}(\gamma^-)\leq\pi R} \leq \frac{e^{-\lambda\eta}}{2}\cdot C'R.\end{aligned}$$

Wählt man zu festem ϵ den Radius $R = 1/\epsilon$, so existiert ein λ_0 mit

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-} G(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right| &\leq \epsilon+\frac{1}{2}\cdot C'Re^{-\lambda\eta} \\ &= \epsilon+\frac{C'}{2\epsilon}\cdot\underbrace{e^{-\lambda\eta}}_{\to 0,\lambda\to\infty} < 2\epsilon \qquad \forall \quad \lambda\geq\lambda_0.\end{aligned}$$

Zu (4): Wegen den obigen Abschätzungen erhält man für $\lambda \geq \lambda_0$

$$\begin{aligned}|G(0)-G_\lambda(0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma=\gamma^++\gamma^-}(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+}(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right|+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-}(G(s)-G_\lambda(s))\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \frac{c}{R}+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-}G_\lambda(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right|+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-}G(s)\cdot e^{\lambda s}\cdot(\frac{1}{s}+\frac{s}{R^2})\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \frac{c}{R}+\frac{c}{R}+2\epsilon = \frac{2c}{R}+2\epsilon = 2\epsilon(c+1).\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung beachte man, dass $\epsilon = 1/R$ gilt. Demnach haben wir $|G(0)-G_\lambda(0)| \to 0$ für $\lambda \to \infty$ und die Hilfsaussage wäre bewiesen. Es folgt

$$G(0) = \lim_{\lambda\to\infty} G_\lambda(0) = \lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\lambda F(x)e^{-x\cdot 0}\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty F(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

(2.5) Satz
Sei $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton steigend und $f(x) \leq c \cdot x$ für ein $c > 0$ und alle $x \geq 1$. Dann ist die Funktion

$$g(s) := s \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} \mathrm{d}x$$

holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Es gebe ein $\gamma > 0$, so dass

$$g(s) - \frac{\gamma}{s-1}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung des Punktes $1 + it$ besitzt. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \gamma. \qquad \diamond$$

Beweis
Wir setzen

$$F(x) := e^{-x} f(e^x) - \gamma \quad \text{für} \quad x \geq 0, \quad \text{bzw.} \quad e^x \geq 1.$$

Dann folgt

$$|F(x)| \leq |e^{-x}| \cdot |f(e^x)| + |\gamma| \leq \frac{1}{e^x} \cdot ce^x + \gamma = c + \gamma$$

für alle $x \geq 0$ und $F|_{[0,R]}$ ist für jedes $R > 0$ integrierbar. Nun gilt mit $y := e^x$, $\mathrm{d}y = e^x \mathrm{d}x$ und für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}
G(s) &:= \int_0^\infty F(x) e^{-xs} \mathrm{d}x = \int_0^\infty (e^{-x} f(e^x) - \gamma) e^{-xs} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (e^{-x} f(e^x) - \gamma) e^{-xs} \frac{e^x}{e^x} \mathrm{d}x = \int_1^\infty (\frac{1}{y} f(y) - \gamma) y^{-s} \frac{1}{y} \mathrm{d}y \\
&= \int_1^\infty f(y) y^{-s-2} \mathrm{d}y - \gamma \int_1^\infty y^{-s-1} \mathrm{d}y = \frac{s+1}{s+1} \int_1^\infty f(y) y^{-(s+1)-1} \mathrm{d}y - \gamma \left[\frac{1}{-s} y^{-s} \right]_1^\infty \\
&= \frac{g(s+1)}{s+1} - \gamma(0 + 1/s) = \frac{1}{s+1} \left(g(s+1) - \frac{\gamma}{s} - \gamma \right).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung besitzt die Funktion

$$z \mapsto \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{holomorph auf } \mathbb{C}\setminus\{0\}} \underbrace{\left(g(z) - \frac{\gamma}{z-1} - \gamma\right)}_{\text{holomorph nach Vor.}}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung des Punktes $1 + it$. Ersetzt man z durch $1+s$ so sieht man, dass

$$s \mapsto \frac{1}{1+s}\left(g(s+1) - \frac{\gamma}{s} - \gamma\right)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung von it besitzt. Nach Satz (2.4) existiert daher

$$\int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\ln(\lambda)} (e^{-x}f(e^x) - \gamma)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_1^{\lambda} \left(\frac{f(y)}{y} - \gamma\right)\frac{1}{y}\mathrm{d}y.$$

Beh.: $\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} = \gamma$.

Bew.: Wir führen den Beweis indirekt und zeigen, dass

1) $\limsup_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} \leq \gamma$ ist und

2) $\liminf_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} \geq \gamma$ ist.

Daraus folgt dann direkt die Behauptung.

Zu (1): Angenommen, es existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} > \gamma + 2\delta.$$

Dann existiert nach Definition des Limes superior eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$ und

$$\frac{f(y_n)}{y_n} > \gamma + 2\delta \quad \Leftrightarrow \quad f(y_n) > (\gamma+2\delta)y_n.$$

Wir definieren

$$\rho := \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+\delta} > 1.$$

Da f monoton steigend ist, folgt für $x \in [y_n, \rho y_n]$

$$f(x) \geq f(y_n) > (\gamma + 2\delta)y_n = (\gamma + \delta)\rho y_n \geq (\gamma + \delta)x$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_{y_n}^{\rho y_n} \left(\frac{f(x)}{x} - \gamma\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x &\geq \int_{y_n}^{\rho y_n} \left(\frac{x(\gamma+\delta)}{x} - \gamma\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_{y_n}^{\rho y_n} \frac{\delta}{x}\mathrm{d}x = \delta[\ln(x)]_{y_n}^{\rho y_n} \\ &= \delta(\ln(\rho y_n) - \ln(y_n)) = \delta \ln(\rho) > 0.\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch zum CAUCHY-Kriterium für die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \left(\frac{f(y)}{y} - \gamma\right)\frac{1}{y}\mathrm{d}y$, nach dem der Wert des Integrals $\int_{y_n}^{\rho y_n} \left(\frac{f(x)}{x} - \gamma\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ der 0 für große n beliebig nahe kommt.

Zu (2): Analog zu (1) nehmen wir an, es existiert ein $\delta > 0$ mit $\gamma - 2\delta > 0$ und

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} < \gamma - 2\delta.$$

Dann existiert nach Definition des Limes inferior eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$ und

$$\frac{f(y_n)}{y_n} < \gamma - 2\delta \quad \Leftrightarrow \quad f(y_n) < (\gamma - 2\delta)y_n.$$

Sei

$$\sigma := \frac{\gamma - 2\delta}{\gamma - \delta} = 1 - \underbrace{\frac{\delta}{\gamma - \delta}}_{\in(0,1),\,\text{da}\,\gamma>2\delta} \in (0,1).$$

Wegen der Monotonie von f folgt für $x \in [\sigma y_n, y_n]$

$$f(x) \leq f(y_n) < (\gamma - 2\delta)y_n = (\gamma - \delta)\sigma y_n \leq (\gamma - \delta)x$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_{\sigma y_n}^{y_n} \left(\frac{f(x)}{x} - \gamma\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x &\leq \int_{\sigma y_n}^{y_n} \left(\frac{x(\gamma-\delta)}{x} - \gamma\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_{\sigma y_n}^{y_n} -\frac{\delta}{x}\mathrm{d}x = -\delta[\ln(x)]_{\sigma y_n}^{y_n} \\ &= -\delta(\ln(y_n) - \ln(\sigma y_n)) = \delta \underbrace{\ln(\sigma)}_{<0,\,\text{da}\,\sigma<1} < 0.\end{aligned}$$

Dies gilt wiederum für beliebig große n und stellt damit ebenfalls einen Widerspruch zum CAUCHY-Kriterium dar.

Aus (1) und (2) erhalten wir

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} \leq \gamma \leq \liminf_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y}.$$

Nun ist der Limes inferior stets kleiner gleich dem Limes superior, woraus in obiger Ungleichung die Gleichheit folgt und damit auch

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y} = \gamma. \qquad \square$$

Wir kommen nun endlich zum angekündigten *Primzahlsatz*.

(2.6) Satz

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \qquad \diamond$$

Beweis

Wir wenden Satz (2.5) an auf $f = \Psi|_{[1,\infty)}$. Wegen $\Psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ ist Ψ monoton steigend und nach (1.3) gilt $\Psi(x) \leq cx$. Aus (2.2) ergibt sich

$$g(s) := s \cdot \int\limits_1^\infty \Psi(x) \cdot x^{-s-1} \mathrm{d}x = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \qquad \forall \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Nach (1.4) sind ζ und ζ' holomorph auf $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0\} \backslash \{1\}$ und es gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$. Nach (2.1) ist $\zeta(1+it) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Damit ist $g(s)$ holomorph auf $\mathrm{Re}(s) > 1$ und für jedes $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ in einer geeigneten Umgebung von $1 + it$.

Da $\zeta(s)$ nach (1.4) einen einfachen Pol mit Residuum 1 bei $s = 1$ hat, ist nach Funktionentheorie I

$$\zeta(s) = (s-1)^{-1} h(s)$$

mit einer für $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorphen Funktion h und damit gilt

$$1 = Res_{s=1}\zeta(s) = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \lim_{s\to 1} h(s) = h(1).$$

Also hat man

$$\begin{aligned} g(s) &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -[(s-1)^{-1}h(s)]' \cdot \frac{s-1}{h(s)} \\ &= -\frac{h'(s)(s-1)-h(s)}{(s-1)^2} \cdot \frac{s-1}{h(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{h'(s)}{h(s)} \end{aligned}$$

und damit

$$g(s) - \frac{1}{s-1} = -\frac{h'(s)}{h(s)}.$$

Damit sind die Voraussetzungen von (2.5) mit $\gamma = 1$ erfüllt, da $h(s)$ und damit auch $h'(s)$ holomorph sind für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und $h(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) = 1$ ist. Man beachte hierzu, dass $h(1) = 1$ und $h(1+it) = it \cdot \zeta(1+it) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist. Folglich hat man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x) \sim x \quad \Rightarrow \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Bei der letzten Folgerung wurde die Aussage von Satz (1.2) verwendet. □

Eine Folgerung aus dem *Primzahlsatz* ist das nachfolgende

(2.7) Lemma
Für jedes $Q > 1$ existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x > x_0$ im Intervall $[x, Qx]$ mindestens eine Primzahl liegt. ◇

Beweis
Sei $Q > 1$. Wir definieren

$$\delta := Q - 1 > 0 \quad \text{und} \quad \epsilon := \frac{\delta}{4+\delta} \in (0,1).$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$ existiert ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$1 - \epsilon < \frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1 + \epsilon \qquad \forall \quad x > x_1.$$

Da $Qx > x$ ist folgt außerdem

$$1 - \epsilon < \frac{\pi(Qx)}{Qx/\ln Qx} < 1 + \epsilon \qquad \forall \quad x > x_1.$$

Desweiteren gilt

$$\frac{Qx/\ln(Qx)}{x/\ln x} = \frac{Qx \cdot \ln x}{x \cdot \ln(Qx)} = \frac{Q \cdot \ln x}{\ln x + \ln Q} = \frac{Q}{1 + \ln Q/\ln x} \to Q \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Demnach existiert ein $x_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{Qx/\ln(Qx)}{x/\ln x} > Q - \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{2} \qquad \forall \quad x > x_2.$$

Wir definieren nun $x_0 := \max\{x_1, x_2\}$. Dann gilt für alle $x > x_0$

1) $1 - \epsilon < \frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1 + \epsilon$ bzw. $1 - \epsilon < \frac{\pi(Qx)}{Qx/\ln Qx} < 1 + \epsilon$ und

2) $1 + \frac{\delta}{2} < \frac{Qx/\ln(Qx)}{x/\ln x}$.

Aus (1) folgt direkt

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln x}(1+\epsilon) \quad \text{und} \quad \frac{Qx}{\ln(Qx)}(1-\epsilon) < \pi(Qx) \qquad \forall \quad x > x_0.$$

Daraus lässt sich mit der Definition von ϵ und mit (2) folgern

$$\begin{aligned}
\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = \frac{1+\delta/(4+\delta)}{1-\delta/(4+\delta)} \quad &= \quad \frac{4+2\delta}{4} = \frac{2+\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{2} \overset{(2)}{<} \frac{Qx/\ln(Qx)}{x/\ln x} \\
&\Leftrightarrow \quad (1+\epsilon)\frac{x}{\ln x} < \frac{Qx}{\ln(Qx)}(1-\epsilon) \\
&\Rightarrow \quad \pi(x) < \pi(Qx) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < \pi(Qx) - \pi(x).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für alle $x > x_0$:

$$\begin{aligned}
\sharp\{p \in \mathbb{P} | \quad p \in [x, Qx]\} \quad &= \quad \sharp\{p \in \mathbb{P} | \quad x \le p \le Qx\} \\
&= \quad \sharp\{p \in \mathbb{P} | \quad p \le Qx\} - \sharp\{p \in \mathbb{P} | \quad p < x\} \\
&\ge \quad \pi(Qx) - \pi(x) > 0.
\end{aligned}$$

□

Im Intervall $[x, Qx]$ muss also mindestens eine Primzahl liegen.

Literatur

[1] Krieg, A.: *Funktionentheorie I*, Skript zur Vorlesung, RWTH Aachen 2010.

[2] Krieg, A.: *Analytische Zahlentheorie*, Skript zur Vorlesung, RWTH Aachen 2009.