Der Dirichletsche Primzahlsatz

Ausarbeitung zum Seminar zur Funktionentheorie

Vortrag am 04.06.2012

Christian Kohl

In den bisherigen Vorträgen wurde auf den Beweis des Primzahlsatzes hingearbeitet. Die Kernaufgabe dieses Seminarvortrages besteht nun darin, diesen mithilfe DIRICHLETscher Charaktere auf arithmetische Progressionen zu erweitern, also den sogenannten DIRICHLETschen Primzahlsatz zu beweisen. Der zweite, kleinere Teil gibt einen ersten Überblick über harmonische Funktionen, deren Eigenschaften im weiteren Verlauf des Seminars benötigt werden.

§1 Der Dirichletsche Primzahlsatz

Das wahrscheinlich bedeutendste Ergebnis der analytischen Zahlentheorie ist der Primzahlsatz, also die Erkenntnis, dass $\pi(x) \sim x/\log(x)$. Hier soll nun eine zuerst von Peter Gustav Lejeune DIRICHLET bewiesene Verallgemeinerung vorgestellt werden.

Der DIRICHLETsche Primzahlsatz besagt, dass die Primzahlen in den arithmetischen Progressionen (auch: arithmetische Folgen) unter bestimmten Voraussetzungen gleichverteilt sind. Hierbei ist eine arithmetische Progression $(a_{k,N}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}$, wobei die Differenz zweier benachbarter Folgeglieder konstant N ist und k das erste Folgenglied (k, $N \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest). Also:

$$a_{k,N} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N},\ n \mapsto k + nN.$$

Zu beweisen ist also der

(1.1) Satz (Dirichletscher Primzahlsatz)
Für $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k, N) = 1$ gilt

$$\pi_{k,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)} \cdot \frac{x}{\log(x)}.$$

Hierbei ist φ die EULERsche phi-Funktion und $\pi_{k,N}$ definiert durch

$$\pi_{k,N}(x) := \#\{p \in \mathbb{P} | p \equiv k \bmod N, p \leq x\}.$$

Die Voraussetzung $\operatorname{ggT}(k, N) = 1$ ist nahezu trivial. Denn arithmetische Progressionen mit $\operatorname{ggT}(k, N) > 1$ enthalten entweder eine Primzahl oder keine (abhängig davon, ob k eine Primzahl ist oder nicht).

Der Beweis des Satzes verläuft analog zum Beweis des Primzahlsatzes.

In der gesamten Ausarbeitung gilt stets $p \in \mathbb{P}$. Außerdem werden die Bezeichnungen gemäß [1] verwendet.

— *Eigenschaften* DIRICHLET*scher L-Reihen und der zahlentheoretischen Funktionen* $\psi_{k,N}$ *und* $\pi_{k,N}$ —

(1.2) Proposition
Sei χ ein DIRICHLETscher Charakter mod N. Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$-\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s}$$

und

$$L(\chi, s) = e^{G_\chi(s)} \qquad \text{mit} \qquad G_\chi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\log(n)} n^{-s}$$

Beweis
Wir zeigen, dass $\chi(n)\mu(n)$ das DIRICHLET-Inverse von χ ist, also $(\chi \cdot \mu) * \chi = e$:

$$(\chi(n) \cdot \mu(n)) * \chi(n) = \sum_{d|n} \chi(d)\mu(d) \cdot \chi\left(\frac{n}{d}\right) \overset{\chi \text{ multipl.}}{=} \chi(n) \sum_{d|n} \mu(d) \overset{[1]\,\mathrm{I}(2.6)a)}{=} \chi(n)e(n)$$

Da χ nach [1] I(6.8) multiplikativ ist, wissen wir, dass $\chi(1) = 1$. Zusammen mit der Definition von $e(n)$, welches nur für $n = 1$ von Null verschieden ist, folgt

$$\sum_{d|n} \chi(d)\mu(d) \cdot \chi\left(\frac{n}{d}\right) = e(n).$$

Nach [1] I(4.17) gilt dann

$$L(\chi, s) = e^{G_\chi(s)} \qquad \text{mit} \qquad G_\chi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g(n)}{\log(n)} n^{-s}$$

und

$$g(n) = \sum_{d|n} \chi(d) \log(d) \cdot \chi\left(\frac{n}{d}\right) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \overset{\chi \text{ multipl.}}{=} \chi(n) \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log(d) \overset{[1]\,\mathrm{I}(2.15)d)}{=} \chi(n)\Lambda(n).$$

Wegen $\left|\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log(n)}\right| \leq 1$ konvergiert $G_\chi(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut. Dann folgt

$$-\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} = -G'_\chi(s) = -\frac{d}{ds}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-s}.$$

Die Abschätzung gilt, denn:

1. Fall: $n \neq p^\nu$ für alle $p \in \mathbb{P}, \nu \in \mathbb{N} : \Lambda(n) = 0 \Rightarrow \left|\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log(n)}\right| = 0.$

2. Fall: $n = p^\nu$ für ein $p \in \mathbb{P}, \nu \in \mathbb{N}$:

(a) $\mathrm{ggT}(p, N) \neq 1 \Rightarrow \chi(n) = 0 \Rightarrow \left|\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log(n)}\right| = 0.$

(b) $\mathrm{ggT}(p, N) = 1$: ($\chi(n)$ Einheitswurzel, also $|\chi(n)| = 1$)

$$\Rightarrow \left|\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log(n)}\right| = \underbrace{|\chi(p^\nu)|}_{=1} \cdot \left|\frac{\Lambda(p^\nu)}{\log(p^\nu)}\right| = 1 \cdot \frac{\log(p)}{\nu\log(p)} = \frac{1}{\nu}. \qquad \square$$

(1.3) Proposition
Ist χ ein reeller Dirichletscher Charakter mod N, so gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) \cdot L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

mit $a(n) \in \mathbb{R}$, $a(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a(m^2) \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis
Nach [1] I(6.12) bzw. [1] I(6.13) konvergiert $L(\chi, s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a(\chi) = 1$ für alle χ und es gilt $L(\chi, s) = \prod_{p\nmid N}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \underset{(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}=1}{\overset{\chi(p)=0,\ p|N}{=}} \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$. Ähnliches gilt für die Riemannsche Zetafunktion, deren Darstellung als Dirichletreihe nach [1] I(3.4) für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a(i) = 1$ konvergiert. Ebenso gilt nach [1] I(4.16)a): $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Nach [1] I(4.11) ist das Produkt $\zeta(s)L(\chi, s)$ zweier Dirichletreihen wieder eindeutig als Dirichletreihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ darstellbar und konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma_a(\chi), \sigma_a(i)\} = 1$. Die Berechnung der Koeffizienten $a(n)$ geschieht mittels der Produktdarstellungen:

Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) \cdot L(\chi, s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}(1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

Da χ reell ist, gilt $\chi(p) \in \{0, 1, -1\}$. Daher hat man

$$(1 - p^{-s})^{-1}(1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls}, & \text{falls } \chi(p) = 0 \quad \text{(i)}, \\ \sum_{l=0}^{\infty} p^{-2ls}, & \text{falls } \chi(p) = -1 \quad \text{(ii)}, \\ \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)p^{-ls}, & \text{falls } \chi(p) = 1 \quad \text{(iii)}. \end{cases} \tag{1}$$

Begründung der Fälle:

(i) Einfache Anwendung der geometrischen Reihe.

(ii) $\frac{1}{(1-p^{-s})(1+p^{-s})} \overset{\text{3. Bin. Formel}}{=} \frac{1}{1-p^{-2s}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} p^{-2ls}$.

(iii) $\frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p^{-s}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls} \overset{\text{Cauchy-Prod.}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} p^{-ks} \cdot p^{-(l-k)s}$

$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} p^{-ls} = \sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls} \underbrace{\sum_{k=0}^{l} 1}_{=l+1}$.

Folglich hat $\zeta(s)L(\chi, s)$ eine absolut konvergente Produktdarstellung

$$D_a(s) = \zeta(s)L(\chi, s) = \prod_p \sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$, wobei f eine zahlentheoretische Funktion ist, deren Werte sich für jedes $p \in \mathbb{P}$ aus einem der drei obigen Fälle ergeben. Nach [1] I(4.15) gilt $\prod_p \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{ls}\right) = D_f(s)$. Die zahlentheoretische Funktion f ist somit gleich obiger zahlentheoretischer Funktion a und $f(p^l)$ besitzt als Wert einen der Koeffizienten von p^{-ls} aus den Summen.

Nach [1] I(4.15) ist a auch multiplikativ. Da die Koeffizienten der Summanden in (1) alle größer oder gleich Null sind, muss $a(p^l) \geq 0$, also auch $a(n) \geq 0$ gelten. Da die Koeffizienten der Summanden in (1) alle größer oder gleich Eins sind, falls $n = m^2$, muss $a(m^2) \geq 1$ gelten. □

(1.4) Definition
Für $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k, N) = 1$ definiert man

$$\begin{aligned}
\pi_{k,N}(x) &:= \#\{p \in \mathbb{P} | p \equiv k \bmod N, p \leq x\}, \\
\psi_{k,N}(x) &:= \sum_{n \leq x, n \equiv k \bmod N} \Lambda(n), \\
\vartheta_{k,N}(x) &:= \sum_{p \leq x, p \equiv k \bmod N} \log(p), x > 0.
\end{aligned}$$

Wir stellen nun Verbindungen zwischen obigen Funktionen her.

(1.5) Lemma
Seien $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k, N) = 1$. Für $x > 0$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi_{k,N}(x)}{x} - \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x} \right) = 0,$$

also $\lim_{x \to \infty} \frac{\psi_{k,N}(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x}$, falls einer der Grenzwerte existiert.

Beweis
Nach [1] I(5.2) hat man

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\psi_{k,N}(x)}{x} - \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{\substack{p^m \leq x,\, m \geq 1 \\ p^m \equiv k \bmod N}} \log(p) - \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv k \bmod N}} \log(p) \right) \\
&= \frac{1}{x} \sum_{\substack{p^m \leq x,\, m \geq 2 \\ p^m \equiv k \bmod N}} \log(p) \leq \frac{1}{x} \sum_{p^m \leq x,\, m \geq 2} \log(p) = \frac{1}{x} \left(\sum_{p^m \leq x,\, m \geq 1} \log(p) - \sum_{p \leq x} \log(p) \right) \\
&\leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \overset{[1]\,\mathrm{I}(5.2)}{\leq} \frac{(\log(x))^2}{2\sqrt{x} \log(2)} \longrightarrow_{x \to \infty} 0,
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

Die Verbindung zu $\pi_{k,N}(x)$ schafft das

(1.6) Lemma
Seien $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k,N) = 1$. Für alle $x \geq 2$ gilt

$$\pi_{k,N}(x) = \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta_{k,N}(t)}{t\log^2(t)}\,dt. \tag{2}$$

Beweis
Man setzt

$$f(n) = \begin{cases} \log(p), & \text{falls } n = p \in \mathbb{P}, p \equiv k \bmod N, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = \vartheta_{k,N}(x).$$

Wendet man die Abelsche Identität [1] I(4.1)a) auf obiges f und folgendes $g(x) = \frac{1}{\log(x)}$ an, so folgt für $x \geq 2$

$$\begin{aligned}\pi_{k,N}(x) = \sum_{3/2 < n \leq x} f(n) \cdot \frac{1}{\log(n)} &= \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{\log(x)} - \frac{\vartheta_{k,N}(3/2)}{\log(3/2)} + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta_{k,N}(t)}{t\log^2(t)}\,dt \\ &= \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta_{k,N}(t)}{t\log^2(t)}\,dt,\end{aligned}$$

denn $\vartheta_{k,N}(x) = 0$ für $x \in [0,2)$, also $\frac{\vartheta_{k,N}(3/2)}{\log(3/2)} = 0$ und $\int_{3/2}^2 \frac{\vartheta_{k,N}(t)}{t\log^2(t)}\,dt = 0$. □

Für den Beweis des DIRICHLETschen Primzahlsatzes benötigen wir

(1.7) Satz
Seien $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k,N) = 1$.
Existiert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x}$, dann auch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi_{k,N}(x)}{x/\log(x)}$ und die Limiten sind gleich.

Beweis
Duch Umstellen von (2) gilt

$$\frac{\pi_{k,N}(x)}{x/\log(x)} = \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x} + \underbrace{\frac{\log(x)}{x}\int_2^x \frac{\vartheta_{k,N}(t)}{t\log^2(t)}\,dt}_{\geq 0 \quad (*)}. \tag{3}$$

Für $x \geq 2$ gilt

$$0 \overset{(*)}{\leq} \frac{\pi_{k,N}(x)}{x/\log(x)} - \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x} = \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{\vartheta_{k,N}(t)}{t \log^2(t)}\, dt \leq \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2(t)}\, dt \overset{[1]\, \mathrm{I}(5.3)b)}{\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}} 0.$$

□

Nur aufgrund der Analogie zum Beweis des Primzahlsatzes formulieren wir

(1.8) Lemma
Für $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(k, N) = 1$ gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $x \geq 1$ gilt

$$\psi_{k,N}(x) \leq c \cdot x.$$

Beweis

$$\psi_{k,N}(x) \leq \psi(x) \overset{[1]\, \mathrm{I}(5.5)}{\leq} c \cdot x.$$

□

(1.9) Lemma
Für $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$ und χ ein DIRICHLETscher Charakter mod N gilt

$$L^3(\chi_0, \sigma) \cdot |L(\chi, \sigma + it)|^4 \cdot |L(\chi^2, \sigma + 2it)| \geq 1. \tag{4}$$

Beweis
Nach (1.2), also

$$L^n(\chi, \sigma) = \left(e^{G_\chi(s)}\right)^n = e^{Log\left(e^{(G_\chi(s))^n}\right)} \overset{k\in\mathbb{N}}{=} e^{n\cdot(G_\chi(s)+2\pi ik)} = e^{nG_\chi(s)} \cdot e^{2\pi ikn} = e^{nG_\chi(s)}$$

gilt für $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&L^3(\chi_0, \sigma) \cdot |L(\chi, \sigma + it)|^4 \cdot |L(\chi^2, \sigma + 2it)| \\
&= \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{3\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-\sigma} + 4\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-(\sigma+it)} + \frac{\chi^2(n)\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-(\sigma+2it)}\right\}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-\sigma} \left\{3\chi_0 + 4\,\mathrm{Re}(\chi(n) n^{-it}) + \mathrm{Re}(\chi^2(n) n^{-2it})\right\}\right)
\end{aligned}$$

Für ggT$(n, N) = 1$ gilt: $\mathrm{Re}(\chi(n)n^{-it}) = \cos(\arg(\chi(n)n^{-it}))$, denn

$$|\chi(n)n^{-it}| = \underbrace{|\chi(n)|}_{=1}|n^{-it}| = |\exp(\log(n) \cdot (-it))| = 1.$$

Mit $\varphi = \arg(\chi(n)n^{-it})$ ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer gleich

$$\begin{cases} 0, & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, N) > 1, \\ 3 + 4\cos\varphi + \cos(2\varphi) = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geq 0, & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, N) = 1, \end{cases}$$

denn zusammen mit dem ersten Additionstheorem und dem trigonometrischen PYTHAGORAS gilt: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Daraus erhält man

$$L^3(\chi_0, \sigma) \cdot |L^4(\chi, \sigma + it)| \cdot |L(\chi^2, \sigma + 2it)| \geq 1,$$

also die Beh. □

(1.10) Satz
Ist χ ein DIRICHLETscher Charakter mod N, so gilt

(i) $L(\chi, 1 + it) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$,

(ii) $L(\chi, 1) \neq 0$, falls $\chi \neq \chi_0$.

Beweis
Für $\chi = \chi_0$ folgt (i), denn nach [1] I(5.8) ist $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \neq 1$ und p^{-s} ist für alle $s \in 1 + i\mathbb{R}$ ungleich 1, denn:

$$p^{-s} = \exp\left(-s \cdot \log(p)\right) = 1 \Leftrightarrow -s\log(p) = 2\pi ik \Leftrightarrow s = -\frac{2\pi ik}{\log(p)},$$

also insbesondere muss $s \in i\mathbb{R}$ gelten. Demnach:

$$L(\chi_0, s) \overset{[1]\,\mathrm{I}(6.12)}{=} \left(\prod_{p|N} \left(1 - p^{-s}\right)\right) \cdot \zeta(s) \neq 0.$$

Sei nun $\chi \neq \chi_0$ und $\big(t \neq 0$ oder $\chi^2 \neq \chi_0\big)$. Durch Multiplikation von (4) mit

$(\sigma-1)^{-1}$ und durch Erweiterung der linken Seite mit $\left(\frac{\sigma-1}{\sigma-1}\right)^3$ folgt:

$$((\sigma-1)L(\chi_0,\sigma))^3 \cdot \left|\frac{L(\chi,\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 \cdot |L(\chi^2,\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}. \tag{5}$$

Angenommen, $L(\chi,1+it)=0$, so gilt für $\sigma\downarrow 1$ auf der linken Seite von (5)

$$\begin{aligned}&\lim_{\sigma\downarrow 1}((\sigma-1)L(\chi_0,\sigma))^3 \cdot \left|\frac{L(\chi,\sigma+it)-L(\chi,1+it)}{(\sigma+it)-(1+it)}\right|^4 \cdot |L(\chi^2,\sigma+2it)| \\ &\underbrace{= \left(\frac{\varphi(N)}{N}\right)^3 \cdot |L'(\chi,1+it)|^4 \cdot |L(\chi^2,1+2it)|,}_{=(*)}\end{aligned}$$

da $L(\chi_0,\sigma)$ in $\sigma=1$ nach [1] I(6.12) eine einfache Polstelle mit Residuum $\frac{\varphi(N)}{N}$ hat. Da nach Voraussetzung $t\neq 0$ oder $\chi^2\neq\chi_0$ ist, ist $L(\chi^2,1+2it)\neq L(\chi_0,1)=\infty$ und damit ein Wert in $\mathbb{R}$. Dann ist aber $(*)\in\mathbb{R}$. Da aber die rechte Seite in (5) gegen unendlich strebt, folgt ein Widerspruch, was (i) beweist.

Es bleibt also lediglich noch der Fall $\chi^2=\chi_0,\ \chi\neq\chi_0,\ t=0$ für (ii) zu zeigen. Zunächst bemerkt man, dass χ wegen $\chi^2=\chi_0$ reeller DIRICHLETscher Charakter sein muss.

Angenommen, $L(\chi,1)=0$. Dann ist $\zeta(s)\cdot L(\chi,s)$ holomorph für $\mathrm{Re}(s)>0$. $\zeta(s)L(\chi,s)$ ist nach (1.3) DIRICHLETreihe zur zahlentheoretischen Funktion $a(n)$, $a(n)\geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, also $|a(n)|=a(n)$. Daher gilt nach [1] I(4.8): $\sigma_b(a)=\sigma_b(|a|)=\sigma_a(a)$. Gülte $\sigma_a(a)=\sigma_b(a)=1$, dann folgt ein Widerspruch zum Satz von LANDAU, da $\zeta(s)\cdot L(\chi,s)$ dann in $s=\sigma_a(a)=1$ keine hebbare Singularität haben dürfte. Angenommen, $\sigma_a(a)\in(0,1)$, dann folgt ebenfalls ein Widerspruch zum Satz von LANDAU, da $\zeta(s)\cdot L(\chi,s)$ holomorphe Fortsetzung der DIRICHLETreihe $D_a(s)$ wäre. Also muss $\sigma_a(a)=\sigma_b(a)=0$ gelten. Mit (1.3) erhält man aber

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)L\left(\chi,\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-1/2}\geq\sum_{m=1}^{\infty}a(m^2)m^{-1}\geq\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}=\infty.$$

Das ist ein Widerspruch, so dass $L(\chi,1)\neq 0$ folgt und somit alle Fälle bewiesen wurden. □

Nun kommt der wesentliche Schritt:

(1.11) Proposition
Für $k, N \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(k, N) = 1$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi_{k,N}(x)}{x} = \frac{1}{\varphi(N)}.$$

Beweis
Nach [1] I(6.10)d) gilt

$$\psi_{k,N}(x) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n \le x, n \equiv k \bmod N} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n \le x} \sum_{\chi (\bmod N)} \chi(n)\overline{\chi(k)}\Lambda(n).$$

Wendet man [1] I(4.1)a) mit

$$f(n) = \frac{1}{\varphi(N)} \cdot \sum_{\chi (\bmod N)} \chi(n)\overline{\chi(k)}\Lambda(n) \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^{-s}$$

an, wobei also $F(x) = \psi_{k,N}(x)$ ist, so erhält man für $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 < n \le x} \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi (\bmod N)} \chi(n)\overline{\chi(k)}\Lambda(n)n^{-s} \\
&= \underbrace{\psi_{k,N}(x)x^{-s}}_{\longrightarrow_{x\to\infty} 0, \text{ wegen (1.8)}} + \underbrace{\psi_{k,N}(1) \cdot 1^{-s}}_{=0, \text{ da } \Lambda(1)=0} + s \int_1^x \psi_{k,N}(t)t^{-s-1}\,dt \\
&\longrightarrow_{x\to\infty} s \int_1^\infty \psi_{k,N}(t)t^{-s-1}\,dt
\end{aligned}$$

Da die Anzahl der DIRICHLETschen Charaktere mod N gegeben ist durch $\varphi(N)$ (siehe [1], S. 59), also insbesondere endlich ist, darf die Summation vertauscht werden und mit (1.2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&s \int_1^\infty \psi_{k,N}(t)t^{-s-1}\,dt = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi (\bmod N)} \sum_{n=1}^\infty \chi(n)\overline{\chi(k)}\Lambda(n)n^{-s} \\
&= \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi (\bmod N)} \overline{\chi(k)} \sum_{n=1}^\infty \chi(n)\Lambda(n)n^{-s} \overset{(1.2)}{=} - \sum_{\chi (\bmod N)} \frac{\overline{\chi(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun den Satz [1] I(5.11) anwenden. Nach [1] I(6.13) ist für $\chi \neq \chi_0$ die

Dirichletsche L-Reihe $L(\chi, s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorph nach [1] I(6.13) und in geeigneten Umgebungen von $1 + it$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nach (1.10)/[1] I(6.13) nullstellenfrei. Damit ist der Ausdruck $-\frac{\overline{\chi(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)}$ für alle $\chi \neq \chi_0$ holomorph in einer solchen Umgebung. Da nach Funktionentheorie I Summen holomorpher Funktionen wieder holomorph sind, folgt, dass

$$- \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ N), \chi \neq \chi_0} \frac{\overline{\chi(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$$

holomorph auf geeigneten Umgebungen von $1 + it$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Man betrachte also noch $-\frac{\overline{\chi(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)}$ für den Fall $\chi = \chi_0$. Nach [1] I(6.12) ist $L(\chi_0, s)$ nullstellenfrei für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Außerdem gilt $L(\chi_0, s) = \frac{h(s)}{s-1}$ mit $h(s)$ ist holomorph auf $\{s \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$. Da $\mathrm{ggT}(k, N) = 1$, folgt mit Definition von χ_0:

$\chi_0(k) = \overline{\chi_0(k)} = 1$. Dann folgt

$$-\frac{\overline{\chi_0(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi_0, s)}{L(\chi_0, s)} = -\frac{1}{\varphi(N)} \cdot \frac{s-1}{h(s)} \cdot \frac{h'(s)(s-1) - h(s)}{(s-1)^2} = -\frac{1}{\varphi(N)} \cdot \frac{h'(s)}{h(s)} + \frac{1/\varphi(N)}{s-1},$$

also, dass $-\frac{\overline{\chi_0(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi_0,s)}{L(\chi_0,s)} - \frac{1/\varphi(N)}{s-1}$ holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist und sich in geeignete Umgebungen von $1 + it$ holomorph fortsetzen lässt für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$- \sum_{\chi (\mathrm{mod}\ N)} \frac{\overline{\chi(k)}}{\varphi(N)} \cdot \frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)} - \frac{1/\varphi(N)}{s-1}$$

holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$ holomorph in eine geeignete Umgebung von $1 + it$ fortsetzbar. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz [1] I(5.11) erfüllt und es folgt die Behauptung. □

Dann folgt leicht das Hauptergebnis des ersten Abschnitts, der Beweis, dass die Primzahlen in den arithmetischen Progressionen, die eine nahezu triviale Voraussetzung erfüllen müssen, gleichverteilt sind.

Beweis ((1.1) Dirichletscher Primzahlsatz)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_{k,N}(x)}{x/\log(x)} \overset{(1.7)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta_{k,N}(x)}{x} \overset{(1.5)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\psi_{k,N}(x)}{x} \overset{(1.11)}{=} \frac{1}{\varphi(N)},$$

also die Behauptung. □

— *Anwendungen* —

Wir geben ein paar Anwendungen der vorigen Ergebnisse:

(1.12) Beispiel
Sei $R = \mathbb{Z}[i]$ oder $R = \mathbb{Z}[\rho]$, $\rho := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, R^* die Einheitengruppe von R und

$$\pi_R(x) := \#\{q \in \mathbb{R} | q \text{ Primelement}, N(q) \leq x^2\} / \#R^*.$$

Dann ist

$$\pi_R(x) \sim \frac{x^2}{2\log(x)}.$$

Um das Beispiel zu beweisen, verwenden wir die algebraische Grundlage zu Aufgabe 8 in §4 aus [1], die hier wiedergegeben sei:

$$\chi_{-4}(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4, \\ -1, & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 4, \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade}, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \chi_{-3}(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 3, \\ -1, & \text{falls } n \equiv 2 \bmod 3, \\ 0, & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

sind (streng) multiplikative zahlentheoretische Funktionen. Sei $\rho = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$. Die Ringe $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[\rho]$ sind faktoriell, d. h. sie erlauben eine bis auf Einheiten eindeutige Primfaktorzerlegung ihrer Elemente. Eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ zerlegt sich in $\mathbb{Z}[i]$ auf eine von drei möglichen Arten:

Falls $\chi_{-4}(p) = 1$, so gilt $p = q\overline{q}$, und q, $\overline{q}$ sind nicht-assoziierte Primelemente in $\mathbb{Z}[i]$;

Falls $\chi_{-4}(p) = -1$, so ist p prim in $\mathbb{Z}[i]$;

Falls $\chi_{-4}(p) = 0$ (also $p = 2$), so gilt $p = uq^2$ mit einer Einheit u und einem Primelement q.

Für $\mathbb{Z}[\rho]$ gilt das analoge Ergebnis mit χ_{-3} an Stelle von χ_{-4}. Die Elemente von i bzw. ρ erzeugen die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$ bzw. $\mathbb{Z}[\rho]$.

Beweis ((1.12) Beispiel)
Sei zunächst $R = \mathbb{Z}[\rho]$. Nach der algebraischen Grundlage wird die Einheitengruppe von R, R^*, erzeugt von ρ. Also:

$$R^* = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, 1\right] = [\rho, \rho - 1, -1, \rho, 1 - \rho, 1]$$

mit $\#R^* = 6$. Man nennt $y, z \in R$ *assoziiert*, wenn $y|z$ und $z|y$, also genau dann, wenn ein invertierbares Element ε existiert mit $y = \varepsilon z$. Demnach gibt es zu jedem $z \in R$ sechs assoziierte Elemente.

Die zahlentheoretischen Funktionen $\chi_{-3}(n)$ und $\chi_{-4}(n)$ sind durch Lemma [1] I(6.8) offensichtlich DIRICHLETsche Charakter mod 3 bzw. mod 4. Nun möchte man eine Aussage über die Anzahl an Primzahlen in R mit Norm kleiner als x^2 machen. Der DIRICHLETsche Charakter $\chi_{-3}(n)$ zerlegt $\mathbb{N}$ in drei arithmetische Progessionen, über die die algebraische Grundlage die entscheidenden Aussagen liefert.

Für $\chi_{-3}(p) = 1$, lässt sich eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ in zwei nicht assoziierte Primzahlen $q, \overline{q}$ zerlegen. Insgesamt erhält man also 12 verschiedene Primzahlen in $\mathbb{Z}[\rho]$, die kleiner sind als x^2 für $p \leq x^2$ und $N(q) = q\overline{q} = p$ erfüllen.

Für $\chi_{-3}(p) = -1$ ist p prim in $\mathbb{Z}[\rho]$. Hier bekommt man demnach sechs verschiedene Primzahlen in $\mathbb{Z}[\rho]$, die kleiner sind als x^2, falls $p \leq x$ und $N(p) = p^2$ erfüllen.

In der von $\chi_{-3}(p) = 0$ erzeugten arithmetischen Progession ist 3 die einzige Primzahl. Es gilt: $N(1 + \rho) = 3$. Also existieren zu $1 + \rho$ fünf weitere, assoziierte Primzahlen mit $N(z) = 3$.

Mit $\varphi(3) = \#\{1, 2\} = 2$, der Beobachtung, dass $x/\log(x)$ langsamer wächst als $x^2/(2\log(x))$, und dem DIRICHLETschen Primzahlsatz erhält man:

$$\begin{aligned}
&\#\{q \in R, q \text{ prim}, N(q) \leq x^2\} \\
&= 6 \cdot \#\{p \in \mathbb{P} | p^2 \leq x^2,\ p \equiv -1 \bmod 3\} + 12 \cdot \{p \in \mathbb{P} | p \leq x^2,\ p \equiv 1 \bmod 3\} \\
&\qquad + \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x^2,\ p \equiv 0 \bmod 2\} \\
&\sim 6 \cdot \frac{1}{\varphi(3)} \cdot \frac{x}{\log x} + 12 \cdot \frac{1}{\varphi(3)} \cdot \frac{x^2}{\log x^2} + 6 \sim 3\frac{x^2}{\log x} \\
&\Rightarrow \pi_R(x) = \frac{\#\{q \in R, q \text{ prim}, N(q) \leq x^2\}}{\#R^*} \sim \frac{1}{2}\frac{x^2}{\log x}
\end{aligned}$$

Analog geht man bei $R = \mathbb{Z}[i]$ mit $\chi_{-4}(n)$ statt $\chi_{-3}(n)$ als DIRICHLETschem Charakter vor:

Aus der algebraischen Grundlage erhält man $R^* = [i, -1, -i, 1]$ und $\#R^* = 4$.

Anzahl der Primzahlen in R, die durch eine Primzahl aus $(4n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt werden: $2 \cdot 4 = 8$

Anzahl der Primzahlen in R, die durch eine Primzahl aus $(4n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt werden: $1 \cdot 4 = 4$

In der von $\chi_{-4}(p) = 0$ erzeugten arithmetischen Progession ist 2 die einzige Primzahl. Es gilt: $N(1+i) = 2$. Also existieren zu $1+i$ drei weitere, assoziierte Primzahlen mit $N(z) = 2$.

Mit $\varphi(4) = \#\{1,3\} = 2$ und dem DIRICHLETschen Primzahlsatz erhält man wie oben:

$$\begin{aligned}
&\#\{q \in R, q \text{ prim}, N(q) \leq x^2\} \\
&= 4 \cdot \#\{p \in \mathbb{P} | p^2 \leq x^2,\ p \equiv -1 \bmod 4\} + 8 \cdot \{p \in \mathbb{P} | p \leq x^2,\ p \equiv 1 \bmod 4\} \\
&\qquad + \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x^2,\ p \text{ gerade}\} \\
&\sim 4 \cdot \frac{1}{\varphi(4)} \cdot \frac{x}{\log x} + 8 \cdot \frac{1}{\varphi(4)} \cdot \frac{x^2}{\log x^2} + 4 \sim 2\frac{x^2}{\log x} \\
&\Rightarrow \pi_R(x) = \frac{\#\{q \in R, q \text{ prim}, N(q) \leq x^2\}}{\#R^*} \sim \frac{1}{2}\frac{x^2}{\log x}
\end{aligned}$$

□

(1.13) Definition
Sei A eine Menge von Primzahlen, also $A \subset \mathbb{P}$. Der Grenzwert

$$\nu(A) := \lim_{x\to\infty} \#\{p \in A | p \leq x\} / \pi(x)$$

heißt, falls er existiert, die *natürliche Diche von A*.

Nach dem DIRICHLETschen Primzahlsatz ist somit klar, dass für $A := \{p \in \mathbb{P} | p = k + nN \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ mit $k, N \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, $\mathrm{ggT}(k, N) = 1$ gilt: $\nu(A) = 1/\varphi(N)$.

Wir geben eine weitere Definition einer Dichte von Primzahlen:

(1.14) Definition
Für eine Menge A von Primzahlen heißt der Grenzwert

$$\alpha(A) := \lim_{s\downarrow 1}\left(\sum_{p\in A} p^{-s} \Big/ \log\left(\frac{1}{s-1}\right)\right),$$

falls er existiert, die *analytische Dichte von A*.

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden, bemerkenswerten Satzes:

(1.15) Satz
Hat eine Menge $A \in \mathbb{P}$ eine natürliche Dichte, so hat sie auch eine analytische Dichte und es gilt $\nu(A) = \alpha(A)$.

Der Satz ist insoweit wichtig, als dass die analytische Dichte häufig einfacher zu berechnen ist als die natürliche Dichte.

Zum Beweis des Satzes werden wir diesen zunächst für einen Spezialfall beweisen, wobei gerade in diesem Fall die Berechnung der natürliche Dichte keine Probleme bereitet. Denn wählt man $A = \mathbb{P}$, ist offensichtlich $\nu(A) = 1$.

(1.16) Lemma
Es gilt $\alpha(\mathbb{P}) = 1$, also

$$\lim_{s\downarrow 1}\left(\sum_{p\in A} p^{-s} \Big/ \log\left(\frac{1}{s-1}\right)\right) = 1.$$

Beweis
Wir wissen: $\zeta(s)$ hat einen einfachen Pol mit Residuum 1 in $s = 1$. Also:

$$\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 \tag{6}$$

Da $s \in \mathbb{R},\ s > 1$ liefert Logarithmieren von (6) zusammen mit der Stetigkeit von log [$\rightarrow$ Vertauschung von Limes und Funktion] und Korollar [1] I(4.18):

$$\log\lim_{s\downarrow 1}\left((s-1)\cdot\zeta(s)\right) = \lim_{s\downarrow 1}\left(\log(s-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log(n)}n^{-s}\right) = 0. \tag{7}$$

Desweiteren gilt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-s} \overset{\frac{\Lambda(p^k)}{\log(p^k)}=\frac{1}{k}}{\underset{p\in\mathbb{P}}{=}} \sum_{q=p^k, p\in\mathbb{P}, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} q^{-s} = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns}. \tag{8}$$

Es ist $\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns}$ beschränkt, denn

$$\left| \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns} \right| < \left| \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n\geq 2} p^{-ns} \right| \leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n\geq 2} \left| p^{-ns} \right|$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} - 1 - \frac{1}{p^s} \right| = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \frac{p^s}{p^s-1} - \frac{p^s+1}{p^s} \right|$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \frac{p^{2s} - (p^s+1)\cdot(p^s-1)}{p^s(p^s-1)} \right| = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \frac{1}{p^s(p^s-1)} \right| \overset{\text{da } s\geq 1}{\leq} \sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \frac{1}{p(p-1)} \right|$$

$$< \sum_{n\geq 2} \left| \frac{1}{n(n-1)} \right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Somit erhält man:

$$\lim_{s\downarrow 1} \frac{-\log(s-1)}{\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}} \overset{(7)}{=} \lim_{s\downarrow 1} \frac{-\log(s-1) + \log(s-1) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)}}{\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}$$

$$= \lim_{s\downarrow 1} \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)}}{\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}} \overset{(8)}{=} \lim_{s\downarrow 1} \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns}}{\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}$$

$$= \lim_{s\downarrow 1} 1 + \underbrace{\frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p^{-ns}}{\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}}_{=(*)}$$

$(*)$ geht für $s \downarrow 1$ gegen 0, da der Zähler, wie oben gezeigt, beschränkt ist und der Nenner nach [1] I(1.4) gegen unendlich divergiert.

Also folgt auch: $\alpha(A) = \lim\limits_{s\downarrow 1} \frac{\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}}{-\log(s-1)} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} \sim \log\left(\frac{1}{s-1}\right)$ □

Es folgt der

Beweis ((1.15) Satz)
Es sei $\pi_A(x) = \#\{p \in A | p \leq x\}$, also die Anzahl der Primzahlen in A bis x. Nach Voraussetzung existiert $\nu(A)$. Dann gilt gemäß Definition der natürlichen Dichte: $\pi_A(x) \sim \nu(A) \cdot \pi(x)$.

Zunächst verifizieren wir, dass

$$R_A(s) := \sum_{p \in A} p^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-s} - (n+1)^{-s}) \pi_A(n).$$

Offensichtlich tritt für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Term n^{-s} in der rechten Reihe genau zweimal auf und zwar im $(n-1)$-ten und n-ten Summanden.

Falls $n \in \mathbb{N} \setminus A$ so gilt $\pi_A(n-1) = \pi_A(n)$, denn von $n-1$ auf n kommt keine neue Primzahl hinzu.

Falls $n \in A$, so gilt $\pi_A(n) = \pi_A(n-1) + 1$. Demnach:

$$\begin{aligned}\sum_{p \in A} p^{-s} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}(\pi_A(n) - \pi_A(n-1)) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} n^{-s}(\pi_A(n) - \pi_A(n-1)) \\ &\underset{\text{verschiebung}}{\overset{\text{Index-}}{=}} \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} n^{-s}\pi_A(n) - \sum_{n=0}^{m-1} (n+1)^{-s}\pi_A(n) \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m-1} (n^{-s} - (n+1)^{-s})\pi_A(n) + \underbrace{\pi_A(0)}_{=0} + \underbrace{m^{-s}\pi_A(m)}_{(*)} \right)\end{aligned}$$

Da $\pi_A(m) \leq m$, gilt $m^{-s}\pi_A(m) \leq m^{-s+1}$ mit $-s+1 < 0$. Daher geht $(*)$ für $m \to \infty$ gegen 0. Durch den Grenzübergang erhält man also die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir wissen bereits, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_A(n)}{\nu(A) \cdot \pi(n)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_A(n)}{\pi(n)} = \nu(A).$$

Dann existiert ein $n_0(\varepsilon) =: n_0$ mit der Eigenschaft

$$\left| \frac{\pi_A(n)}{\pi(n)} - \nu(A) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Durch Auflösen des Betrages und Multiplikation mit $\pi(n)$ folgt

$$(\nu(A)-\varepsilon)\pi(n) \leq \pi_A(n) \leq (\nu(A)+\varepsilon)\pi(n) \qquad \forall\, n \geq n_0. \tag{9}$$

Abschätzung nach oben für $R_A(s)$:

$$R_A(s) \overset{(9)}{\leq} \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} (n^{-s}-(n+1)^{-s})\pi_A(n)}_{=:\, c_1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} (n^{-s}-(n+1)^{-s})(\nu(A)+\varepsilon)\pi(n)$$

$$= (\nu(A)+\varepsilon) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-s}-(n+1)^{-s})\pi(n)}_{=\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s},\text{ da } \pi(n)=\pi_{\mathbb{P}}(n)} \underbrace{-\sum_{n=1}^{n_0-1} (n^{-s}-(n+1)^{-s})(\nu(A)+\varepsilon)\pi(n)}_{=:\, c_2} + c_1$$

Abschätzung nach unten für $R_A(s)$:

$$R_A(s) \overset{(9)}{\geq} \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} (n^{-s}-(n+1)^{-s})\pi_A(n)}_{=\, c_1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} (n^{-s}-(n+1)^{-s})(\nu(A)-\varepsilon)\pi(n)$$

$$= (\nu(A)-\varepsilon) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-s}-(n+1)^{-s})\pi(n)}_{=\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s},\text{ da } \pi(n)=\pi_{\mathbb{P}}(n)} \underbrace{-\sum_{n=1}^{n_0-1} (n^{-s}-(n+1)^{-s})(\nu(A)-\varepsilon)\pi(n)}_{=:\, c_3} + c_1$$

Wir zeigen nun die Beschränktheit der c_i für $s \in [1, 2]$, $i \in \underline{3}$.

Sei $c := \sum_{n=1}^{n_0-1} (n^{-s}-(n+1)^{-s})\pi(n)$. Da $c_2 = (\nu(A)+\varepsilon)c$, $c_3 = (\nu(A)-\varepsilon)c$, $(\nu(A) \pm \varepsilon)$ konstant, und $c_1 < c$, reicht es, die Beschränktheit für c zu zeigen:

Offensichtlich ist c nach unten durch Null beschränkt, da alle Summanden größer gleich Null sind. Da $\pi(n)$ monoton wachsend ist und $n^{-s}-(n+1)^{-s} < 1$ gilt, folgt $c < (n_0-2)\cdot\pi(n_0-1)$, also die Beschränktheit von c.

Insgesamt hat man also:

$$(\nu(A)-\varepsilon)\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}+c_1+c_2 \leq \sum_{p\in A} p^{-s} \leq (\nu(A)+\varepsilon)\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}+c_1+c_3$$

$$(\nu(A)-\varepsilon)+\frac{c_1+c_2}{R_{\mathbb{P}}(s)} \leq \frac{R_A(s)}{R_{\mathbb{P}}(s)} \leq (\nu(A)+\varepsilon)+\frac{c_1+c_3}{R_{\mathbb{P}}(s)}$$

Da $c_i,\ i\in\underline{3}$ beschränkt und $R_{\mathbb{P}}(1)$ nach [1] I(1.4) divergiert, ist

$$\lim_{s\downarrow 1}\frac{c_1+c_2}{R_{\mathbb{P}}(s)} = \lim_{s\downarrow 1}\frac{c_1+c_3}{R_{\mathbb{P}}(s)} = 0.$$

Nach (1.16) gilt ebenfalls für $R_{\mathbb{P}}(s)$: $\lim\limits_{s\downarrow 1}\frac{R_{\mathbb{P}}(s)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = 1$.

Also gilt:

$$\nu(A)-\varepsilon \leq \lim_{s\downarrow 1}\frac{R_A(s)}{R_{\mathbb{P}}(s)} = \lim_{s\downarrow}\frac{R_A(s)}{R_{\mathbb{P}}(s)}\cdot\frac{R_{\mathbb{P}}(s)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = \alpha(A) \leq \nu(A)+\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, also auch beliebig klein, gilt für $\varepsilon\to 0$:

$$\nu(A) \leq \alpha(A) \leq \nu(A),$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

§2 Harmonische Funktionen

Dieser Abschitt stellt ein paar Grundlagen für den nächsten Vortrag bereit. Um das Wachstumsverhalten ganzer Funktionen abschätzen zu können, benötigt man Sätze über harmonische Funktionen. Im Folgenden werden daher einige Erkenntnisse aus der Funktionentheorie I ohne Beweis wiederholt, ein bereits als Übungsaufgabe gestelltes Lemma erhält hingegen einen zweiten Beweis, um damit das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der JENSENschen Formel herzuleiten.

— *Wiederholung Funktionentheorie I* —

Wir wiederholen den Begriff des LAPLACE-Operators

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

auf dem $\mathbb{R}^2$. Mit der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ haben wir also die

(2.1) Definition
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie zweimal stetig partiell differenzierbar ist und

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \equiv 0$$

erfüllt.

Durch Differentiation der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen und anschließender Ausnutzung des Satzes von SCHWARZ folgt

(2.2) Lemma
Der Real- und der Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist eine harmonische Funktion.

Der Betrag einer holomorphen Funktion ist im Allgemeinen nicht harmonisch, wie $\Delta|z^2| = \Delta|z|^2 \overset{z=x+iy}{=} \Delta\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \Delta(x^2+y^2) = 4$ zeigt. Es folgt aber das

(2.3) Korollar
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}^*$ holomorph. Dann ist die Funktion

$$U \to \mathbb{R},\, z \mapsto \log|f(z)|,$$

harmonisch. Speziell ist die Funktion

$$\mathbb{C}^* \to \mathbb{R},\, z \mapsto \log|z|$$

harmonisch.

Bereits aus einer Hausaufgabe kennen wir ebenfalls

(2.4) Satz
Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent

(i) G ist einfach zusammenhängend.

(ii) Jede harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ ist Realteil einer holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$.

In der Funktionentheorie haben wir die Mittelwertformel für harmonische Funktionen aus der Poisson-Formel hergeleitet. Will man sie ohne diesen Umweg beweisen, reicht es, den Realteil der Cauchyschen Integralformel zu betrachten. Also:

(2.5) Korollar
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann hat φ die Mittelwerteigenschaft, d. h. für $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subset U$ gilt

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Lemmas:

(2.6) Lemma
Seien $R > 0, \varepsilon > 0$ und $f : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen in $K_R(0)$. Dann existiert das folgende uneigentliche Riemann-Integral und es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(R \cdot e^{it})\right| dt = \log|f(0)|.$$

Falls f wie in (2.6) gar nullstellenfrei in $\overline{K_R(0)}$ ist, so gilt aufgrund des Identitätssatzes für hinreichend kleine $\delta > 0$, dass f auf $K_{R+\delta}(0)$ nullstellenfrei ist. Dann ist die Funktion

$$\overline{K_R(0)} \to \mathbb{R}, z \mapsto \log|f(z)|$$

stetig und nach (2.3) harmonisch auf $K_{R+\delta}(0)$. Nach (2.5) gilt dann die Mittelpunktsformel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(R\cdot e^{it})\right| dt = \log|f(0)|$$

und damit die Behauptung für diesen Fall.

Wegen $f \not\equiv 0$ können auf dem Kompaktum aber nur endlich viele Nullstellen liegen, so dass die linke Seite der Gleichung in (2.6) ein uneigentliches RIEMANN-Integral ist.

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall von (2.6) mit $R = 1$ und $f(z) = 1 - z$. Es ist bereits aus einer Hausaufgabe zur Funktionentheorie I bekannt. Trotzdem wird hier ein weiterer Beweis geliefert werden.

(2.7) Lemma
Das uneigentliche RIEMANN-Integral $\int_0^{2\pi} \log\left|1-e^{it}\right| dt$ existiert und hat den Wert 0.

Beweis
Sei $U := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) < 1\}$. Dann ist U als konvexes Gebiet einfach zusammenhängend. Die Funktion

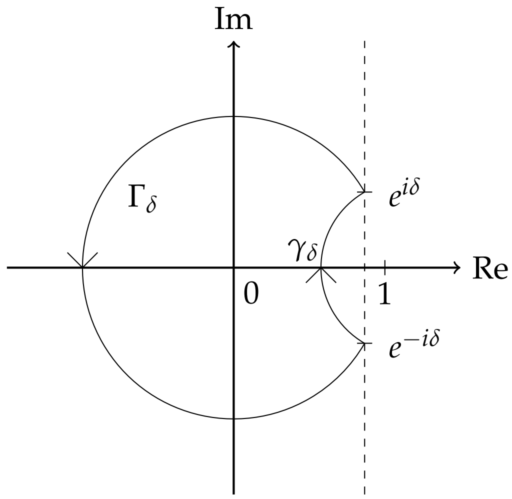
$$g : U \to \mathbb{C},\ z \mapsto \operatorname{Log}(1-z)$$

ist holomorph, da die holomorphe Funktion $1 - z$ für alle $z \in U$ nur Werte in $\mathbb{C}_-$ annimmt und insbesondere nullstellenfrei ist. Dabei gilt $\operatorname{Re}(g(z)) = \log|1-z|$ und man kann den Zweig so wählen, dass $|\operatorname{Im}(g(z))| < \pi/2$ gilt, denn, gerade der Hauptzweig erfüllt wegen $1 - z \in \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$ für alle $z \in U$ die Bedingung. Es folgt

$$|g(z)| \le |\log(|1-z|)| + \pi/2 \qquad \text{für } z \in U. \tag{10}$$

Sei $\delta > 0$ hinreichend klein, γ_δ der Kreisbogen in U um 1 durch $e^{i\delta}$ und $e^{-i\delta}$, durchlaufen in negativer Richtung. Wir betrachten desweiteren $\Gamma_\delta : [\delta, 2\pi-\delta] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Man betrachte hierzu auch die Skizze auf der nächsten Seite. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log\left|1-e^{it}\right| dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \log|1-z|\cdot\frac{1}{z}\,dz = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{g(z)}{z}\,dz\right). \tag{11}$$



Da $\Gamma_\delta + \gamma_\delta$ nullhomolog in U ist und $g(z)/z$ holomorph in U, folgt nach dem CAUCHYschen Integralsatz

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{g(z)}{z}\, dz + \int_{\gamma_\delta} \frac{g(z)}{z}\, dz = 0. \tag{12}$$

Also

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{g(z)}{z}\, dz\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{g(z)}{z}\, dz\right).$$

Für $z \in \operatorname{Sp}(\gamma_\delta)$ hat man

$$|g(z)| \le \left|\log\left|1 - e^{i\delta}\right|\right| + \frac{\pi}{2} = \log\frac{1}{|1 - e^{i\delta}|} + \frac{\pi}{2}.$$

Wegen $\lim_{\delta\downarrow 0}\left|\frac{e^{i\delta}-1}{\delta}\right| = \lim_{\delta\downarrow 0}\left|\frac{e^{i\delta}-e^{i\cdot 0}}{\delta-0}\right| = \left|\left(e^{i\delta}\right)'\right|\Big|_{\delta=0} = |i\cdot e^{i\cdot 0}| = |i| = 1$ gilt

$$\frac{\delta}{2} < \left|1 - e^{i\delta}\right| < 2\delta$$

für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$ und damit

$$|g(z)| \le \log\frac{2}{\delta} + \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } z \in \operatorname{Sp}(\gamma_\delta).$$

Für $z \in \mathrm{Sp}(\gamma_\delta)$ gilt darüber hinaus nach der Dreiecksungleichung

$$|z| = |1 - 1 - z| \overset{\Delta}{\geq} 1 - |1 - z| = 1 - \left|1 - e^{i\delta}\right| \geq 1 - 2\delta.$$

Insgesamt also

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| \leq \frac{(\pi/2) + \log(2/\delta)}{1 - 2\delta} \qquad \text{für } z \in \mathrm{Sp}(\gamma_\delta).$$

Die „Länge von γ_δ“ ist $\leq$ „Umfang halber Einheitskreis“ $\cdot$ „Radius“ $= \pi \cdot |1 - e^{i\delta}|$ $\leq 2\pi\delta$. Es folgt

$$\left|\int_{\gamma_\delta} \frac{g(z)}{z}\, dz\right| \leq \frac{(\pi/2) + \log(2/\delta)}{1 - 2\delta} \cdot 2\pi\delta \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} 0. \tag{13}$$

Aus Symmetriegründen ist

$$\int_0^{2\pi} \log\left|1 - e^{it}\right| dt = 2\int_0^{\pi} \log\left|1 - e^{it}\right| dt$$

und ebenso

$$2\int_\delta^{\pi} \log\left|1 - e^{it}\right| dt = \int_\delta^{2\pi-\delta} \log\left|1 - e^{it}\right| dt.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \log\left|1 - e^{it}\right| dt = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^{2\pi-\delta} \log\left|1 - e^{it}\right| dt \overset{(11),(12),(13)}{=} 0.$$

□

Nun geben wir einen Beweis von (2.6).

Beweis ((2.6) Lemma)
f hat in $\partial K_R(0)$ nur endlich viele Nullstellen, etwa $a_1, \ldots, a_n$ mit Wiederholung gemäß Vielfachheit. Dann betrachten wir die holomorphe Funktion

$$\tilde{f} : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto f(z) \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_j - z}.$$

Offensichtlich hat $\tilde{f}$ dann keine Nullstellen in $\overline{K_R(0)}$ und somit auch nicht in $K_{R+\varepsilon}(0)$ für ε hinreichend klein aufgrund des Identitätssatzes. Also gilt nach der Mittelwertformel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\tilde{f}(R\cdot e^{it})\right| dt = \log\left|\tilde{f}(0)\right|.$$

Offensichtlich gilt $\tilde{f}(0) = f(0)$. Da die $a_j \in \partial K_R(0)$ sind für alle $j = 1, \dots, n$, lassen sich diese schreiben als $a_j = R \cdot e^{i\vartheta_j}, 0 \leq \vartheta_j < 2\pi$. Für $z = R \cdot e^{it}, z \neq a_1, \dots, a_n$ gilt dann

$$\log\left|\frac{a_j}{a_j - z}\right| = \log\left|\frac{R\cdot e^{i\vartheta_j}}{R\cdot(e^{i\vartheta_j} - e^{it})}\right| = -\log\left|\frac{(e^{i\vartheta_j} - e^{it})}{e^{i\vartheta_j}}\right| = -\log\left|1 - e^{i(t-\vartheta_j)}\right|.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| = \log\left|\tilde{f}(0)\right| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\tilde{f}(R\cdot e^{it})\right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(R\cdot e^{it}) \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{R\cdot e^{i\vartheta_j}}{R\cdot e^{i\vartheta_j} - R\cdot e^{it}}\right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(R\cdot e^{it})\right| - \sum_{j=1}^{n} \log\left|1 - e^{i(t-\vartheta)}\right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \log\left|f(R\cdot e^{it})\right| dt - \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \log\left|1 - e^{i(t-\vartheta)}\right| dt\right).
\end{aligned}$$

Da die Summe im letzten Term endlich ist, dürfen Integral und Summe vertauscht werden. Nach (2.7) existieren dann die Integrale $\int_0^{2\pi} \log\left|1 - e^{i(t-\vartheta)}\right| dt$ und haben den Wert 0, da sie aus Symmetriegründen und der Tatsache, dass $e^{2\pi i} = 1$ gilt, gleich $\int_0^{2\pi} \log\left|1 - e^{it}\right| dt$ sind. Somit folgt die Behauptung. □

Literatur

[1] Aloys Krieg. Analytische Zahlentheorie, RWTH Aachen, 2009.