Wachstumsverhalten ganzer Funktionen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 11.06.2012

Simon Langer

Inhaltsverzeichnis

§1 Einleitung

Diese Ausarbeitung behandelt das Wachstumsverhalten ganzer Funktionen und führt ganze Funktionen endlicher Ordnung ein.

Zunächst schließen wir die Überlegungen zur Cauchyschen Integralformel mit der Jensenschen Formel.
Anschließend stellen wir das betragsmäßige Maximum ganzer Funktionen in Kreisen mit endlichen Radien um die Null in Verbindung mit den dort vorhandenen Nullstellen.
Zum Schluss führen wir ganze Funktionen endlicher Ordnung sowie einige Eigenschaften derselben ein.

§2 Wachstumsverhalten ganzer Funktionen

Eine weitere der Cauchyschen Integralformel verwandten Formel beschreiben wir hier, um nachher die Poisson-Jensensche Formel beweisen zu können.

(2.1) Satz (Poisson-Formel)
Sei Seien $R > 0$, $\varepsilon > 0$ und $f : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}dt$$

für alle $z \in K_R(0)$. ◇

Beweis
Die Cauchysche Integralformel ist anwendbar und liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Substituiert man ζ durch Re^{it}, so erhält man

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})iRe^{it}}{Re^{it} - z}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})R}{R - e^{-it}z}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})R^2}{R^2 - Re^{-it}z}dt.$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die ebenfalls auf $K_{R+\varepsilon}(0)$ holomorphe Funktion h mit $h(\omega) = \dfrac{f(\omega)}{R^2 - \omega\overline{z}}$ an, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{f(Re^{it})}{R^2 - Re^{it}\overline{z}}R^2(R^2 - z\overline{z})}{R^2 - Re^{-it}z}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})(R^2 - |z^2|)}{(R - e^{it}\overline{z})(R - e^{-it}z)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})(R^2 - |z^2|)}{(Re^{-it} - \overline{z})(Re^{it} - z)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}dt. \end{aligned}$$ □

Die Jensensche Formel stellt einen Zusammenhang zwischen dem Kreisintegral des Logarithmus einer holomorphen Funktion und seinen Nullstellen her. Sie verallgemeinert Kapitel II, Lemma (1.7) aus [1], weil jetzt auch Nullstellen in $K_R(0)$ zulässig sind.

(2.2) Satz (Jensensche Formel)
Seien $R > 0$, $\varepsilon > 0$ und $f : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) \neq 0$. Seien $a_1, ..., a_N$ die Nullstellen von f in $K_R(0)$ mit Wiederholung gemäß Vielfachheit. Dann konvergiert das folgende uneigentliche Riemann-Integral und es gilt

$$\ln|f(0)| + \sum_{j=1}^{N} \ln\frac{R}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})|dt. \qquad \diamond$$

Beweis
Wir betrachten zunächst eine abgewandelte Funktion $\tilde{f}$, weil wir für $\tilde{f}$ die Behauptung mit Hilfe von Kapitel II, Lemma (1.7) aus [1] zeigen können. Danach führen wir das Ergebnis auf f zurück. Sei dazu

$$\tilde{f} : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{R^2 - \overline{a_j}z}{R(a_j - z)}.$$

$\tilde{f}$ ist holomorph, denn nach Kapitel III, Lemma (3.8)(iii) aus [2] existiert für jede Nullstelle a_j mit $j \in \{1, ..., N\}$ ein $r > 0$ und eine holomorphe Funktion
$g : K_r(0) \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = (a_j - z) \cdot g(z) \text{ für alle } z \in K_r(a_j) \cap K_{R+\varepsilon}(0) \text{ und } g(0) \neq 0.$$

Es findet sich also für alle Nullstellen eine Umgebung, in der f wie angegeben darstellbar ist. Das bedeutet für $\tilde{f}$, dass alle Nullstellen des Nenners durch Kürzen wegfallen. $\tilde{f}$ ist also nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph.
Da $R^2 - \overline{a_j}z$ für $|a_j| < R$, $j \in \{1, ..., N\}$ nicht Null annehmen kann, hat $\tilde{f}$ auch keine Nullstellen in $K_R(0)$. Deshalb ist Lemma (1.7) anwendbar und wir erhalten:

$$\ln|\tilde{f}(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\tilde{f}(Re^{it})|dt.$$

Nach Definition von $\tilde{f}$ gilt aber auch:

$$\ln|\tilde{f}(0)| = \ln\left|f(0) \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{R}{a_j}\right| \overset{|a_j|<R}{=} \ln|f(0)| + \sum_{j=1}^{N} \ln\frac{R}{|a_j|}.$$

Für $|z| = R$ gilt:

$$\left|\frac{R^2 - \overline{a_j}z}{R(a_j - z)}\right| = \left|\frac{z(\overline{z} - \overline{a_j})}{R(a_j - z)}\right| = \left|\frac{-(\overline{a_j - z})}{a_j - z}\right| = 1,$$

also $\ln|\tilde{f}(Re^{it})| = \ln|f(Re^{it})|$ für $t \in [0, 2\pi)$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die Jensensche Formel ist bei Modifikation von f auch für $f(0) = 0$ anwendbar. Andererseits kann man sie für $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_R(0)$ allgemeiner formulieren.

(2.3) Bemerkung

a) Ist 0 eine Nullstelle von f der Ordnung $k < \infty$, so kann man (2.2) natürlich auf $f(z)/z^k$ oder $f(z)/(z/R)^k$ anwenden.

b) Es sei $0 < R \leq \infty$ und f holomorph in $K_R(0)$, $f \not\equiv 0$. $(a_n)_n$ sei die Folge der Nullstellen von f mit Wiederholung gemäß Vielfachheit. Es sei $|z| < r < R$ mit $f(z) \neq 0$. Dann gilt allgemeiner die Poisson-Jensensche Formel

$$\ln|f(z)| = \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\phi})| \cdot \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2} d\phi - \sum_{|a_n|<r} \ln\left|\frac{r^2 - \overline{a_n}z}{r(a_j - z)}\right|. \qquad \diamond$$

Beweis

a) Dieser Teil ist klar.

b) Wir beweisen die Aussage in drei Teilen, indem wir von leichten Spezialfällen auf allgemeinere Fälle schließen.

i) f habe keine Nullstellen in $|z| \leq r$. Daraus folgt $|a_n| > r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{|a_n|<r} \ln\left|\frac{r^2 - \overline{a_n}z}{r(a_j - z)}\right| = 0.$$

Weiterhin ist $\ln|f(z)|$ nach Kapitel II, (1.3) und (1.4) aus [1] Realteil einer auf $K_R(0)$ holomorphen Funktion g. Die Poisson-Formel (2.1) liefert

$$\begin{aligned}\ln|f(z)| = \operatorname{Re}(g(z)) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\phi})\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2} d\phi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(f|re^{i\phi}|)\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2} d\phi.\end{aligned}$$

ii) f habe keine Nullstellen in $|z| = r$.

Sei $\tilde{f} = f(z) \cdot \prod_{|a_n|<r} \dfrac{r^2 - \overline{a_n}z}{r(a_n - z)}$. Das Produkt ist endlich, da nach dem Identitätssatz nur endlich viele Nullstellen in einem Kompaktum $\overline{K_r(0)}$ und damit

insbesondere in $K_r(0)$ liegen. Dann erfüllt $\tilde{f}$ analog zum Beweis der Jensenschen Formel (2.2) die Bedingungen von i).
Es gilt also

$$\begin{aligned}\ln|\tilde{f}(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(\tilde{f}|re^{i\phi}|)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\phi}-z|^2}d\phi \\ &\overset{(2.2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(f|re^{i\phi}|)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\phi}-z|^2}d\phi.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\ln|\tilde{f}(z)| = \ln|f(z)| + \sum_{|a_n|<r} \ln\left|\frac{r^2-\overline{a_n}z}{r(a_n-z)}\right|,$$

woraus die Behauptung folgt.

iii) Wir stellen keine zusätzlichen Bedingungen mehr an f. Nullstellen sind überall zulässig.
Sei $\tilde{f} = \dfrac{f(z)}{\prod_{|a_n|=r}(z-a_n)}$. Dann erfüllt $\tilde{f}$ die Bedingungen von ii).
Es gilt also

$$\begin{aligned}\ln|\tilde{f}(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\tilde{f}(re^{i\phi})|\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\phi}-z|^2}d\phi - \sum_{|a_n|<r}\ln\left|\frac{r^2-\overline{a_n}z}{r(a_j-z)}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{|f(re^{i\phi})|}{|\prod_{|a_n|=r}(z-a_n)|}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\phi}-z|^2}d\phi - \sum_{|a_n|<r}\ln\left|\frac{r^2-\overline{a_n}z}{r(a_j-z)}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln|f(re^{i\phi})| - \sum_{|a_n|=r}\ln|re^{i\phi}-a_n|\right)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\phi}-z|^2}d\phi \\ &\quad - \sum_{|a_n|<r}\ln\left|\frac{r^2-\overline{a_n}z}{r(a_j-z)}\right|.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\ln|\tilde{f}(z)| &= \ln|f(z)| - \sum_{|a_n|=r}\ln|z-a_n| \\ &\overset{4.1}{=} \ln|f(z)| - \sum_{|a_n|=r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|re^{i\phi}-a_n|\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\phi}-z|^2}d\phi,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt, da Integral und Summe aufgrund ihrer Endlichkeit vertauscht werden können. □

Wir führen die Anzahl der Nullstellen und das betragsmäßige Maximum in einem Kreis um Null für holomorphe Funktionen ein.

(2.4) Definition
Seien $R > 0$, $\varepsilon > 0$ und $f : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sei $N_f(R)$ die Anzahl der Nullstellen von f in $\overline{K_R(0)}$ unter Zählung der Vielfachheiten und

$$M_f(R) := \max\{|f(z)|; |z| = R\} = \max\{|f(z)|; |z| \leq R\}. \qquad \diamond$$

Damit können wir einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen und dem betragsmäßigen Maximum herstellen.

(2.5) Korollar
Seien $R > 0$, $\varepsilon > 0$ und $f : K_{R+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) \neq 0$. Seien $a_1, ..., a_N$ die Nullstellen von f in $K_R(0)$ mit Wiederholung gemäß Vielfachheit. Dann gilt

$$|f(0)| \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{R}{|a_j|} = \frac{|f(0)| \cdot R^N}{|a_1| \cdot ... \cdot |a_n|} \leq M_f(R). \qquad \diamond$$

Beweis
Wir nutzen die Monotonie des natürlichen Logarithmus auf $\mathbb{R}$ aus, indem wir die Ungleichung für den Logarithmus der Ausdrücke zeigen. Da die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt sind, gilt:

$$\begin{aligned}
\ln(|f(0)| \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{R}{|a_j|}) = \ln|f(0)| + \sum_{j=1}^{N} \ln \frac{R}{|a_j|} &\overset{(2.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\max\{|f(Re^{it})|; t \in [0, 2\pi)\}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \ln M_f(R) \int_0^{2\pi} dt = \ln M_f(R).
\end{aligned}$$

□

Die Nullstellen einer ganzen Funktion kann man auf folgende Weise abschätzen.

(2.6) Korollar
Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion. Dann existieren positive Konstanten $C_1,\ C_2$, sodass

$$N_f(R) \leq C_1 + C_2 \ln M_f(2R) \text{ für alle } R > 0. \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $k = \mathrm{ord}_0 f < \infty$ die Ordnung der Nullstelle von f. Wie im Beweis von Satz 2.2 wenden wir Kapitel III, Lemma (3.8)(iii) aus [2] an. Da f ganz ist, hat die Potenzreihenentwicklung um 0 einen unbeschränkten Konvergenzradius. Deshalb existiert eine ganze Funktion h mit:

$$h(z) = \frac{f(z)}{z^k} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } h(0) = \frac{1}{c} \neq 0.$$

Dann gilt für $g(z) := c \cdot h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $g(0) = 1$ ist.
Für $R > 0$ gilt:

$$N_f(R) = N_g(R) + k \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} M_g(2R) &= \max\{|\frac{f(z)}{z^k}c|; |z| = R\} \\ &= \frac{|c|}{(2R)^k} \max\{|f(z)|; |z| = R\} = \frac{|c|}{(2R)^k} M_f(2R). \end{aligned} \tag{2}$$

Wir bezeichnen die Nullstellen von g in $K_{2R}(0)$ mit $a_1,\ a_2, ...,\ a_{N_g(2R)}$, wobei diese betragsmäßig aufsteigend sortiert sind, und erhalten aus Korollar 2.5:

$$2^{N_g(R)} \overset{|a_i| \leq R}{\leq} 2^{N_g(R)} \prod_{j=1}^{N_g(R)} \frac{R}{|a_j|} = \prod_{j=1}^{N_g(R)} \frac{2R}{|a_j|} \leq \prod_{j=1}^{N_g(2R)} \frac{2R}{|a_j|} \overset{(2.5)}{\leq} \frac{M_g(2R)}{|g(0)|} = M_g(2R).$$

Wegen der Monotonie des natürlichen Logarithmus auf $\mathbb{R}$ gilt auch
$\ln 2^{N_g(R)} \leq \ln M_g(2R)$ beziehungsweise

$$N_g(R) \ln 2 \leq \ln M_g(2R). \tag{3}$$

Mit (1), (2) und (3) folgt:

$$
\begin{aligned}
N_f(R) &\overset{(1)}{=} N_g(R) + k \overset{(3)}{\leq} \frac{\ln M_g(2R)}{\ln 2} + k \overset{(2)}{=} \frac{\ln\left(\frac{|c|}{(2R)^k} M_f(2R)\right)}{\ln 2} + k \\
&= \frac{\ln|c|}{\ln 2} - \frac{k \cdot \ln(2R)}{\ln 2} + \frac{\ln M_f(2R)}{\ln 2} + k \\
&= -k\left(\frac{\ln(2R)}{\ln 2} - \frac{\ln 2}{\ln 2}\right) + \frac{\ln|c|}{\ln 2} + \frac{\ln M_f(2R)}{\ln 2} \\
&= -k\frac{\ln(R)}{\ln 2} + \frac{\ln|c|}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\ln M_f(2R) \leq \frac{\ln|c|}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\ln M_f(2R).
\end{aligned}
$$

Mit $C_1 = \dfrac{\ln|c|}{\ln 2}$ und $C_2 = \dfrac{1}{\ln 2}$ erhält man die Behauptung. □

In speziellen Fällen kann man die Konstanten C_1 und C_2 allerdings auch schärfer wählen. Dazu betrachten wir zwei nicht-konstante ganze Funktionen, nämlich zwei Exponentialfunktionen.

(2.7) Beispiel

a) Sei $f(z) = e^z$. Dann gilt $N_f(R) = 0$ und $M_f(2R) = e^{2R}$.
Demnach kann man $C_1 = C_2 = 0$ wählen und erhält:

$$N_f(R) = 0 \leq 0 = 0 + 0 \cdot 2R = 0 + 0 \cdot \ln M_f(2R).$$

b) Sei $f(z) = e^{2\pi i z} - 1$. Dann stammen die Nullstellen aus der Menge $[-|R|, |R|] \cap \mathbb{Z}$, das heißt $N_f(R) = 2\lfloor R \rfloor + 1$. Es ist außerdem
$M_f(2R) \geq e^{4\pi R} \geq 2e^{2\pi R}$. Demnach kann man $C_1 = 1 - \dfrac{\ln 2}{\pi}$, $C_2 = \dfrac{1}{\pi}$ wählen und erhält:

$$
\begin{aligned}
N_f(R) = 2\lfloor R \rfloor + 1 \leq 2R + 1 &= \frac{\ln 2}{\pi} + 2R + 1 - \frac{\ln 2}{\pi} \\
&= C_2(\ln 2 + 2\pi R) + C_1 = C_2 \ln(M_f(2R)) + C_1.
\end{aligned}
$$
◇

§3 Ganze Funktionen endlicher Ordnung

Wir studieren nun eine Klasse ganzer Funktionen, die Klasse der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Dazu definieren wir zunächst, was eine solche Funktion ausmacht.

(3.1) Definition
Eine ganze Funktion f heißt von endlicher Ordnung, wenn es ein $\alpha > 0$ und ein $c > 0$ gibt, sodass

$$M_f(R) \leq c \exp(R^\alpha) \text{ für alle } R > 0.$$

In diesem Fall nennt man

$$o(f) := \inf\{\alpha > 0;\ M_f(R) \exp(-R^\alpha) \text{ ist beschränkt für } R > 0\}$$

die Ordnung von f. ◇

Da die Ordnung als Infimum definiert ist, muss die Beschränktheit nur für alle darüber liegenden Werte gelten, das heißt $M_f(R)e^{-R^{o(f)}}$ ist im Allgemeinen nicht beschränkt. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f(z) = ze^z$, denn für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$, sodass $M_f(R) \cdot e^{-R^{1+\varepsilon}}$ beschränkt ist, aber $M_f(R) \cdot e^{-R}$ ist unbeschränkt.
Um per Definition zu zeigen, dass eine ganze Funktion endlicher Ordnung ist, reicht es

$$M_f(R) \leq c_1 e^{R^\alpha} \text{ für alle } R \geq R_0, R_0 \text{ beliebig}$$

zu beweisen, denn eine ganze Funktion ist für alle $R_0 \in \mathbb{R}_+$ auf dem Kompaktum $\overline{K_{R_0}(0)}$ beschränkt und es gilt daher $c_2 = \max\{|f(z)|; |z| \leq R_0\}$ für ein $c_2 \in \mathbb{R}$ und

$$M_f(R) \leq c_2 + \max\{|f(z)|; |z| \leq R\} \leq c_2 + ce^{R^\alpha} \leq c_1 e^{R^\alpha}$$

für ein $c_1 \geq c$ groß genug.

Um die Ordnung einer Funktion einordnen und vergleichen zu können, untersuchen wir diese für bekannte ganze Funktionen.

(3.2) Beispiel
a) Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existieren $\alpha,\ \beta > 0$, sodass

$$|p(z)| \leq \alpha + \beta |z|^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es somit ein $c > 0$, sodass

$$\alpha + \beta |z|^n \leq ce^{|z|^\varepsilon} \leq ce^{R^\varepsilon} \text{ für alle } z \in \mathbb{C},$$

denn die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom. Nach Definition der Ordnung und der freien Wählbarkeit von ε ist $p(z)$ von Ordnung 0.

b) Sei $p(z)$ wie in a) gewählt. Man bedenke, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein hinreichend großes $R > 0$ existiert, sodass $\beta R^n \leq R^{n+\varepsilon}$. Dann folgt für $f(z) = e^{p(z)}$ wie in a) für ein $c > 0$

$$|f(z)| = e^{\mathrm{Re}(p(z))} \leq e^{|p(z)|} \leq e^{\alpha + \beta |z|^n} \leq e^\alpha e^{\beta R^n} \leq e^\alpha e^{R^{n+\varepsilon}} \leq ce^{R^{n+\varepsilon}},\ z \in \mathbb{C}.$$

Demnach ist f von endlicher Ordnung mit $o(f) \leq n$.

c) Sei $f(z) \in \{\sin z,\ \cos z \mid z \in \mathbb{C}\}$.

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(iz)} + e^{\mathrm{Re}(-iz)}\right) \leq e^{|z|} \leq e^R.$$

Daraus folgt zunächst, dass $M_f(R) \cdot e^{-R^{1+\varepsilon}}$ für alle $\varepsilon > 0$ beschränkt ist. Die Ordnung ist also kleiner oder gleich 1. Um zu zeigen, dass sie gleich 1 ist, müssen wir $|f(z)|$ auch nach unten abschätzen. Hierbei reicht es aber, dies für ein bestimmtes z zu tun. Wir wählen $z = iy$, $y > 1$. Dann gilt:

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) \overset{\frac{e^y}{e^{-y}} \geq 2}{\geq} \frac{1}{4}e^y = \frac{1}{4}e^{|z|}.$$

Somit folgt auch, dass $M_f(R) \cdot e^{-R^{1-\varepsilon}}$ für alle $\varepsilon > 0$ unbeschränkt ist. Für e^z gilt auch $\frac{1}{4}e^{|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|}$. Damit sind Sinus, Kosinus und die Exponentialfunktion von Ordnung 1.

d) Sei

$$f(z) = \cos(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{z})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n.$$

Dann folgt wie in c)

$$\frac{1}{4}e^{|\sqrt{z}|} \leq |f(z)| \leq e^{|\sqrt{z}|} \leq e^{R^{1/2}}.$$

Also gilt für alle $\varepsilon > 0$:
$M_f(R) \cdot e^{-R^{1/2+\varepsilon}}$ ist beschränkt und $M_f(R) \cdot e^{-R^{1/2-\varepsilon}}$ ist unbeschränkt.
Infolgedessen ist $\cos(\sqrt{z})$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

e) Sei $f(z) = e^{(e^z)}$. Dann ist $f(z)$ von unendlicher Ordnung, da die Exponentialfunktion schneller steigt als jedes Polynom. $\diamond$

Wir wollen nun kurz auf die algebraische Struktur ganzer Funktionen endlicher Ordnung eingehen und dabei gleichzeitig Abschätzungen für die Ordnung der Summe und des (skalaren) Produktes von Funktionen festlegen.

(3.3) Lemma
Die Menge $\mathcal{E}$ der ganzen Funktionen endlicher Ordnung ist eine Unteralgebra von der Menge aller ganzen Funktionen. Für alle $f,\ g \in \mathcal{E}$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

i) $o(f+g) \leq \max\{o(f), o(g)\}$,

ii) $o(f \cdot g) \leq \max\{o(f), o(g)\}$ und

iii) $o(\alpha f) = o(f)$. $\diamond$

Beweis
Da $f,\ g \in \mathcal{E}$, gilt $|f(z)| \leq c_1 e^{(|z|^\nu)}$ und $|g(z)| \leq c_2 e^{(|z|^\mu)}$ für alle $\nu > o(f),\ \mu > o(g)$ bei geeigneten $c_1,\ c_2 > 0$.
Sei $\delta := \max\{\nu,\ \mu\}$ und ohne Einschränkung $|z| \geq 1$. Dann gilt

i) $|f(z) + g(z)| \leq c_1 e^{(|z|^\nu)} + c_2 e^{(|z|^\mu)} \leq (c_1 + c_2) e^{(|z|^\delta)}$,

ii) $|f(z) \cdot g(z)| \leq c_1 c_2 e^{(|z|^\nu + |z|^\mu)} \leq c_1 c_2 e^{(2|z|^\delta)}$ und

iii) $|\alpha f(z)| \leq |\alpha| c_1 e^{(|z|^\nu)}$.

Nähert sich ν der Ordnung von f von oben und μ der Ordnung von g von oben, so nähert sich auch δ dem Maximum der Ordnungen von oben. Daraus folgen die beiden Ungleichungen und der Abschluss nach oben für die dritte Gleichung. Für den Abschluss nach unten sei $\beta := o(f)$.
Dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $|f(z)| e^{-|z|^{\beta-\epsilon}}$ ist für alle $\epsilon > 0$ unbeschränkt ist.
Damit ist aber auch $|\alpha f(z)| e^{-|z|^{\beta-\epsilon}} = |f(z)||\alpha| e^{-|z|^{\beta-\epsilon}}$ für alle $\epsilon > 0$ unbeschränkt.
Folglich ist $\mathcal{E}$ bezüglich der (skalaren) Multiplikation und Addition abgeschlossen. Mit der Identität und der Nullfunktion (beide Ordnung 0) existieren auch die jeweiligen neutralen Elemente. Deshalb sind die ganzen Funktionen endlicher Ordnung eine Unteralgebra der ganzen Funktionen. $\square$

(3.4) Korollar
Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion endlicher Ordnung und $\alpha > o(f)$. Dann gilt

a) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$N_f(R) \leq C \cdot R^\alpha \text{ für alle } R \geq 1.$$

b) Sind $a_1,\ a_2, ...$ die von 0 verschiedenen Nullstellen von f mit Wiederholung gemäß Vielfachheit, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\alpha} < \infty. \qquad \diamond$$

Beweis
a) Nach (2.6) und (3.1) gilt für alle $R \geq 1$ und ein geeignetes $C > 0$

$$N_f(R) \leq C_1 + C_2 \ln M_f(2R) \leq C_1 + C_2 \ln c + C_2 2^\alpha R^\alpha \overset{R\geq 1}{\leq} C \cdot R^\alpha.$$

b) Sei $o(f) < \beta < \alpha$. Nach a) existiert ein $C > 0$ mit $N_f(R) \leq C \cdot R^\beta$.
Für alle n mit $|a_n| \geq 1$ gilt somit

$$n \leq N_f(|a_n|) \leq C|a_n|^\beta \Longrightarrow \frac{n}{C} \leq |a_n|^\beta \overset{\frac{\alpha}{\beta}>1}{\Longrightarrow} \left(\frac{n}{C}\right)^{\alpha/\beta} \leq |a_n|^\alpha.$$

Daraus folgt

$$\sum_{|a_n|\geq 1} \frac{1}{|a_n|^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{C}\right)^{\alpha/\beta}} = C^{\alpha/\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/\beta}}.$$

Wegen $\dfrac{\alpha}{\beta} > 1$ haben wir also eine konvergente Majorante zur Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\alpha}$ gefunden, denn bei einer nicht-konstanten ganzen Funktion existieren auf $K_1(0)$ nur endlich viele Nullstelle, das heißt die Addition der Summe $\sum_{|a_n|<1} \dfrac{1}{|a_n|^\alpha}$ ändert nichts an der Konvergenz. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n <^{-\alpha}$ für $\alpha = o(f)$ konvergieren oder divergieren kann. Die Voraussetzung im Satz lässt sich also im Allgemeinen nicht zu $\alpha \geq o(f)$ abändern.

(3.5) Beispiel

i) Sei $f(z) = e^z$, also $\alpha = o(f) = 1$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\alpha} = 0 < \infty$

ii) Sei $f(z) = \sin z$, also $\alpha = o(f) = 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\alpha} \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|\pi} \overset{\text{harmonische Reihe}}{=} \infty. \qquad \diamond$$

Falls man den Realteil einer ganzen Funktion im Wesentlichen gegen eine Potenz abschätzen kann, so ist diese Funktion ein Polynom über dessen Grad der Exponent Aufschluss gibt. Dazu schauen wir uns den folgenden Satz an.

(3.6) Lemma
Seien $C_1,\ C_2,\ \lambda > 0$ und f eine ganze Funktion mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Re}(f(z)) \leq C_1 + C_2|z|^{\lambda} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann ist f ein Polynom von einem Grad kleiner oder gleich λ. $\diamond$

Beweis
Um die Aussage beweisen zu können, greifen wir zunächst auf die Orthogonalitätsrelationen des Sinus und Kosinus zurück. Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt)dt = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}^*, \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kt)dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(kt)dt = \pi \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y &= \cos(x+y) + \sin x \sin y = \cos(x+y) + \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) \\
&= \cos(x+y) - \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}\right) \\
&= \cos(x+y) + \frac{1}{4}\left(e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\right) \\
&= \cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) \\
&= \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Analog zu (3) folgt auch

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\sin(x+y) - \frac{1}{2}\sin(x-y) \tag{4}$$

und

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) \tag{5}$$

Mit (1), (3), (4) und (5) folgt nun

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(nt)dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(nt)dt = 0 \text{ für alle } k,n \in \mathbb{N},\ k \neq n \tag{6}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(nt)dt = 0 \text{ für alle } k,n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

(2), (6) und (7) werden wir im Folgenden zum Beweis verwenden.

Sei vorerst $f(0) = 0$. Da f ganz ist, kann man mit $z = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, f als konvergente Potenzreihe darstellen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)z^n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)r^n(\cos(nt) + i\sin(nt))$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Wir wollen im Weiteren zeigen, dass der Realteil dieser Reihe gleich einer endlichen Summe ist, das heißt es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n = 0$ für alle $n > N$.
Für den Realteil von f gilt

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(nt) - b_n\sin(nt))$$

Aus (2), (6) und (7) folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(kt)\,\mathrm{Re}(f(re^{it}))dt &= \int_0^{2\pi}\cos(kt)\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(nt) - b_n\sin(nt))dt \\ &\overset{\text{Vertausche Int,Reihe}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n(a_n\cos(kt)\cos(nt) - b_n\cos(kt)\sin(nt))dt \\ &\overset{(2),(6),(7)}{=} a_k r^k \pi. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Vertauschung ist aufgrund von kompakt gleichmäßiger Konvergenz erlaubt, die bei ganzen Funktionen vorliegt und somit auch bei deren Realteil.

Nach Kapitel II, Lemma (1.2) aus [1] ist $\mathrm{Re}(f(z))$ eine harmonische Funktion. Wendet man auf diese Funktion Korollar (1.5) aus [1] mit $z_0 = 0$ an, so erhält man

$$0 = \mathrm{Re}(f(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(re^{it}))dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(re^{it}))dt. \tag{9}$$

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned}
|a_k| &\overset{(8)}{=} \frac{1}{\pi r^k}\left|\int_0^{2\pi} \cos(kt)\,\mathrm{Re}(f(re^{it}))dt\right| \leq \frac{1}{\pi r^k}\int_0^{2\pi} |\,\mathrm{Re}(f(re^{it}))|dt \\
&\overset{(9)}{=} \frac{1}{\pi r^k}\int_0^{2\pi} (|\,\mathrm{Re}(f(re^{it}))| + \mathrm{Re}(f(re^{it})))dt \\
&= \frac{2}{\pi r^k}\int_0^{2\pi} \max\{\mathrm{Re}(f(re^{it})),\ 0\}dt \\
&\overset{Vor}{\leq} \frac{2}{\pi r^k}\int_0^{2\pi} (C_1 + C_2 r^\lambda)dt = 4\left(C_1 r^{-k} + C_2 r^{\lambda-k}\right).
\end{aligned}$$

Für $k > \lambda$ folgt $a_k = 0$ durch die Limesbetrachtung $r \to \infty$.

Ohne vorherige Begründungen, die alle analog sind, ersetzen wir den Kosinus noch durch den Sinus. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(kt)\,\mathrm{Re}(f(re^{it}))dt &= \int_0^{2\pi} \sin(kt) \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos(nt) - b_n\sin(nt))dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n(a_n\sin(kt)\cos(nt) - b_n\sin(kt)\sin(nt))dt \\
&= b_k r^k \pi.
\end{aligned}$$

Die nachfolgende Abschätzung ist ebenfalls analog. Deshalb ist auch $b_k = 0$ für alle $k > \lambda$, wie man erneut an der Limesbetrachtung $r \to \infty$ sieht. Somit ist $f(z)$ ein Polynom dessen Grad kleiner oder gleich λ ist. Ist $f(0) \neq 0$ so kann man den Beweis für $f(z) - f(0)$ durchführen. □

§4 Anhang

(4.1) Satz (Hilfssatz)
Es seien $z,\ a \in \mathbb{C}$ und $|z| < r = |a|$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|re^{i\phi} - a|\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2}d\phi = \ln|z - a|.$$

Insbesondere existiert dieses (uneigentliche) Integral. ◇

Beweis
Sei $a_n := a + \frac{1}{n}$. Dann ist $\ln|z - a_n|$ eine harmonische Funktion und somit Realteil einer holomorphen Funktion $f(z - a_n)$. Mit der Poisson-Formel folgt

$$\ln|z - a_n| = \mathrm{Re}\big(f(z - a_n)\big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|re^{i\phi} - a_n|\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2}d\phi.$$

Da $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist, ist $(\ln|re^{i\phi} - a_n|)_{n\geq 1}$ monoton steigend mit $\lim_{n\to\infty} \ln|re^{i\phi} - a_n| = \ln|re^{i\phi} - a|$. Daraus folgt mit dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}\ln|z - a| &= \lim_{n\to\infty} \ln|z - a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|re^{i\phi} - a_n|\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2}d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|re^{i\phi} - a|\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\phi} - z|^2}d\phi = \ln|z - a|.\end{aligned}$$

□

Literatur

[1] A. Krieg: Analytische Zahlentheorie. RWTH Aachen, Aachen 2009.

[2] A. Krieg: Funktionentheorie I. RWTH Aachen, Aachen 2010.