Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. A. Krieg
M. Woitalla

Aachen, den 7. April 2014

1. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie I

Abgabe bis Dienstag, den 15.04.2014, 18:00 Uhr

Ein algebraischer Zahlkörper ist ein Teilkörper K von $\mathbb{C}$ mit $[K : \mathbb{Q}] < \infty$.

Aufgabe 1

Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ die Vereinigung aller algebraischer Zahlkörper über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass L ein Körper ist und geben Sie eine weitere Beschreibung von L an. (4 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^3 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie, dass $(1, \alpha, \alpha^2)$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$ ist. Ist $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung?

(b) Klassifizieren Sie die Polynome $p_a(x) = x^3 + a$, $a \in \mathbb{Q}$ nach der Galois-Gruppe ihres Zerfällungskörpers über $\mathbb{Q}$.

(3+5 Punkte)

Aufgabe 3

Es sei $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Bestimmen Sie ein primitives Element a von $K|\mathbb{Q}$ und bestimmen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie weiter, dass $K|\mathbb{Q}$ galoisch ist und bestimmen Sie die Galois-Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$. (5 Punkte)

Aufgabe 4

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie, dass K nur endlich viele Einheitswurzeln enthält. (5 Punkte)

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Dienstag, den 15.04.2014, um 18:00 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.